

Міністерство освіти і науки України
Державний вищий навчальний заклад
«Приазовський державний технічний університет»
Кафедра фізики

О. В. Цветкова, В. Г. Єфременко, Ю. Г. Чабак

**КУРС ФІЗИКИ
У ВИЗНАЧЕННЯХ, ПРИКЛАДАХ І ЗАДАЧАХ**

Навчальний посібник для самостійної роботи студентів
технічних спеціальностей

2-ге видання виправлене та доповнене

Луцьк
Вежа-Друк
2024

УДК 53.02/06

Ц 92

Рекомендовано вченою радою
ДВНЗ «Приазовський державний технічний університет»
як навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів
(протокол № 11 від 30.05.2024 р.)

Рецензенти:

Щетинін С. В. – д-р техн. наук, професор, ДВНЗ «Приазовський державний технічний університет»;

Галій П. В. – д-р фіз.-матем. наук, професор, Львівський національний університет ім. І. Франка;

Гіржон В. В. – д-р фіз.-матем. наук, професор, Національний університет «Запорізька політехніка».

Цветкова О. В.

Ц 92

Курс фізики у визначеннях, прикладах і задачах : навчальний посібник для самостійної роботи студентів технічних спеціальностей / О. В. Цветкова, В. Г. Єфременко, Ю. Г. Чабак. 2-ге вид., виправ. та доп. – Луцьк: Вежа-Друк, 2024. – 152 с.

ISBN 978-966-940-592-0

Даний навчальний посібник є стисло викладений курс загальної фізики для індивідуальної навчально-дослідної роботи студентів технічних спеціальностей з курсу фізики, розрахованого на 6 і більше кредитів. Містить основні теоретичні положення, алгоритми і приклади розв'язків ситуативних завдань з фізики, а також варіативні завдання по всім темам. Може бути корисний як при виконанні навчально-дослідницької роботи студентів (УДРС), так і при самостійній роботі над курсом.

УДК 53.02/06

ISBN 978-966-940-592-0

© Цветкова О. В.,
Єфременко В. Г.,
Чабак Ю. Г., 2024
© ГВУЗ «ПГТУ», 2024

ПЕРЕДМОВА

Курс фізики в системі вузівської підготовки інженерів займає особливе місце. Велика частина технічних дисциплін спирається на ті, чи інші фундаментальні наукові теорії, перш за все, фізичні. Фізика, як ніяка інша наука, сприяє організації та розвитку творчого мислення, є базою для більшості технічних наук, розширює науково-технічний і світоглядний кругозір, дає основу екологічної освіти. Студент, який засвоїв курс фізики, володіє культурою мислення, здатний до узагальнення, аналізу, сприйняття інформації, вибору мети і методів її досягнення.

Який критерій можна ввести для визначення ступеня засвоєння курсу? Перш за все, це вміння поєднувати теоретичні знання і здатність вирішувати конкретні практичні та експериментальні завдання. Вищий критерій – вміння самостійно визначати проблеми, формулювати завдання і пропонувати способи їх вирішення. Однак, якщо теорію в межах навчального курсу можна засвоїти, то, щоб навчитися застосовувати знання, недостатньо розв'язати на практичному занятті декілька завдань по темі, кількість яких обмежена навчальним навантаженням з курсу. Для цього необхідна додаткова самостійна робота, допомогу в якій може надати цей посібник.

Класичні задачі з фізики досить різноманітні як за умовами, так і за кількістю питань. У існуючих збірниках задач з курсу загальної фізики ця різноманітність досягається простою перестановкою числових даних, які стосуються умов і параметрів, що залежать від умови, і віднесених до так званих питань. Саме таке розмаїття лякає і, в деяких випадках, відволікає від суті завдання. Насправді, завдання, в межах теми, мають єдиний алгоритм розв'язку, який студент, без достатніх знань і навичок не зауважує. Для вирішення цієї проблеми авторами розроблений системний підхід: ситуативне завдання з певною кількістю питань, які будують алгоритм розв'язку. Більше того, відповідаючи послідовно на питання до завдань, студент вивчає теорію по темі. Ситуативні завдання

представлені різними варіантами вихідних даних, а це наголошує на те, що початкові умови не змінюють ходу вирішення задач.

Насиченість сучасної освіти різноплановими курсами з одночасним скороченням годин, що відводяться на вивчення кожного окремого предмета, призвело до того, що багато студентів перестали користуватися підручниками, а процес навчання замінили «загляданням в Інтернет» у пошуках відповідей на конкретні питання. Таке спотворення навчального процесу згубне з багатьох причин: починаючи з того, що розрізнена обмежена інформація з Інтернету може бути представлена як на рівні шкільного курсу, так і в спеціальних термінах курсу теоретичної фізики, закінчуючи тим, що студент не бачить загальної цілісної картини досліджуваного явища, не кажучи про його прояви і використання, а також зв'язки з іншими фізичними процесами.

У даному посібнику запропоновані методичні рекомендації до загального курсу фізики (для технічних спеціальностей вищих навчальних закладів), що містять базовий конспект (короткий перелік термінів і визначень для кожної теми, тобто теоретичний мінімум), завдання двох типів: завдання на визначення і ситуативні завдання з кількома питаннями, а також приклади розв'язання і деякі рекомендації (підказки), які потрібно використовувати під час самостійної роботи. У деяких темах алгоритмом розв'язку є послідовно поставлені питання, які допомагають в ситуативному завданні прийти до правильної відповіді і, отже, до засвоєння курсу.

Даний навчальний посібник у жодному випадку не замінює підручник. Мета посібника – допомогти у розв'язуванні задач, навчити крок за кроком самостійно опрацьовувати обрану тему, бачити загальну картину досліджуваного явища. Передбачається комплексне використання посібника з класичними підручниками з фізики [1-3], що містять в кінці кожного розділу перелік питань, на які потрібно відповісти для перевірки засвоєння матеріалу.

Автори висловлюють подяку рецензентам доктору техн. наук, професору Щетініну С.В. (Приазовський державний технічний університет), доктору фіз.-мат. наук, професору Галію П.В. (Львівський національний університет ім. Івана Франка), доктору фіз.-мат. наук, професору Гіржону В.В. (Національний університет «Запорізька політехніка») за цінні поради щодо покращення змісту посібника.

ВСТУП

Рекомендації студентам по роботі із посібником

Вивчіть теорію за рекомендованими джерелами та конспектами лекцій. Зверніть увагу: цей посібник не замінює підручники – він конспективно містить той мінімум визначень, положень і законів, які Ви повинні засвоїти по темі.

Підтема «Завдання на визначення» обов'язкова для самостійного опрацювання. Вона має різні варіанти функціональних залежностей та початкових умов, які не впливають на методи розв'язку. Тому не важливо, які параметри умови ви вибираєте. Оберіть умову і розв'яжіть задачу, використовуючи теоретичні знання.

У розділі «Завдання по темі» сформульовані фізичні ситуації, до яких додано достатню кількість запитань. Зверніть увагу на варіантність ситуацій. Це означає, що починаючи роботу, вам потрібно окреслити умову. Оберіть будь-який із запропонованих варіантів і приступайте до його вирішення. Відповідайте на питання послідовно: відповідь попереднього може бути використана у наступному питанні. Приступаючи до вирішення, опрацюйте вказівки під заголовком «Алгоритм розв'язку задач». У деяких, найбільш складних, темах наведені «Приклади розв'язання» або «Рекомендації» – скористайтесь ними! Якщо ж в цій частині Ви не побачили підказок, перечитайте теорію – відповідь міститься там! Виконуючи самостійно всі завдання, Ви зможете засвоїти курс в достатньому обсязі.

У разі, якщо ваша самостійна робота повинна бути оцінена викладачем, оберіть завдання за варіантами, запропонованими в Додатку В. Оформлення звіту обов'язкове.

При оформленні звіту запишіть умову варіантного завдання повністю; переведіть всі числові дані до єдиної системи СІ. Звіт повинен бути виконаний акуратно; для пояснення розв'язку, де це необхідно, зроблено креслення.

Хід рішення кожного завдання повинен супроводжуватися коротким поясненням, яке в логічній послідовності розкриває хід міркувань, що веде до шуканої відповіді. У поясненнях до задачі необхідно вказувати основні закони і формули, на яких базується розв'язок даної задачі. При отриманні розрахункової формули, яка необхідна для вирішення завдання, повинен бути присутнім висновок. Рішення завдання рекомендується спочатку зробити в загальному вигляді, тобто тільки в буквених позначеннях, пояснюючи фізичний зміст всіх буквених позначень, використаних у формулі. Обчислення слід проводити шляхом підстановки заданих числових величин в розрахункову формулу. Завдання має закінчуватися відповіддю, в якій точність числового результату визначається числом значущих цифр вихідних даних. Константи фізичних величин та інші довідкові дані вибираються з довідників.

Тема 1. КІНЕМАТИКА ПОСТУПОВОГО РУХУ МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ

1.1 Основні теоретичні положення

Радіус-вектор точки $\vec{r}$ – вектор, проведений з початку системи відліку до точки. Компоненти радіус-вектора $\vec{r}$ це проекції радіус-вектора на осі OX, OY, OZ декартової системи координат. $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – орти (одичинні вектори) напрямків X, Y, Z.

Описати рух тіла означає вказати для кожного моменту часу положення в просторі і швидкість тіла, тобто задати **кінематичне рівняння руху** матеріальної точки:

$$\vec{r} = \vec{r}(t), \quad \text{або} \quad \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

Переміщення – вектор $\Delta\vec{r}$, що з'єднує початкове і кінцеве положення точки, чисельно рівний модулю збільшення $|\Delta\vec{r}|$ радіус-вектора $\vec{r}$ за проміжок часу Δt .

Середня швидкість – вектор, чисельно рівний відношенню переміщення $\Delta\vec{r}$ до проміжку часу Δt , за який відбулося це переміщення $\vec{v}_{cp} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$.

Миттєва швидкість тіла – векторна величина, що характеризує зміну радіус-вектора з часом, чисельно дорівнює похідній радіус-вектора за часом:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}, \quad \text{або} \quad \vec{v} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k},$$

де $v_x = \frac{dx}{dt}$, $v_y = \frac{dy}{dt}$, $v_z = \frac{dz}{dt}$ – незалежні складові швидкості (проекції швидкості на осі OX, OY, OZ).

Модуль швидкості (числове значення):

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}.$$

Вектор швидкості спрямований по дотичній до траєкторії.

Миттєве прискорення тіла – векторна величина, що характеризує швидкість зміни вектора швидкості, чисельно рівна

похідній швидкості за часом, або другій похідній радіус-вектора за часом:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}, \quad \text{або} \quad \vec{a} = \frac{dv_x}{dt} \vec{i} + \frac{dv_y}{dt} \vec{j} + \frac{dv_z}{dt} \vec{k}.$$

Так як швидкість може змінюватися як за величиною, так і за напрямком, прискорення при криволінійному русі має дві складові:

тангенціальне прискорення $\vec{a}_\tau$ – визначає зміну швидкості за величиною $a_\tau = \frac{dv}{dt}$ (направлено по дотичній до траєкторії);

нормальне прискорення $\vec{a}_n$ – визначає зміну швидкості у напрямку $a_n = \frac{v^2}{R}$ (направлено вздовж радіуса R кривизни траєкторії до центру кола).

Повне прискорення $\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$;

його модуль (числове значення) $a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$.

Траєкторія – лінія, яку описує точка в просторі під час руху (залежить від вибору системи відліку).

Шлях – довжина траєкторії (сума всіх довжин ділянок траєкторії), що пройшла точка за розглянутий проміжок часу:

$$S = \int_1^2 |\vec{v}| dt = \int_1^2 \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} dt.$$

Середня шляхова швидкість – скалярна величина чисельно дорівнює відношенню пройденого шляху S до часу руху Δt : $v_n = \frac{S}{\Delta t}$.

Якщо по одній з осей координат рух рівноприскорений ($a_x = \text{const}$), то рівняння складової швидкості можна записати наступним чином:

$$v_x = \int a_x dt = a_x t + v_{0x},$$

де v_{0x} – константа інтегрування, яку знаходять з початкових умов (швидкість в початковий момент часу).

Тоді рівняння руху вздовж цієї ж осі:

$$x = \int v_x dt = \int (a_x t + v_{0x}) dt = \frac{a_x t^2}{2} + v_{0x} t + x_0,$$

де x_0 – координата в початковий момент часу.

Якщо напрям руху тіла співпадає з напрямком обраної осі, то швидкість позитивна, якщо не співпадає – то негативна. Цього не можна сказати про прискорення: його знак визначає вид руху (прискорене – при позитивному значенні, або уповільнене – при негативному).

Якщо знаки швидкості та прискорення різні, це означає, що в процесі свого руху матеріальна точка буде зупинитися, тобто в певний момент часу t' $v = 0$. У цьому випадку для прямолінійного руху результуючий шлях знаходять як суму ділянок шляху до зупинки і шлях від зупинки до поточного моменту часу.

У разі двовимірного руху подібні рівняння для швидкості і координати по осі ОУ матимуть аналогічний вигляд:

$$v_y = \int a_y dt = a_y t + v_{0y} \quad \text{і} \quad y = \frac{a_y t^2}{2} + v_{0y} t + y_0.$$

1.2 Завдання на визначення

Задача 1.1. При прямолінійному русі матеріальної точки залежність координати x від часу t записується рівнянням:

а) $x = 5 + 2t - 0,5t^2$, м; б) $x = -8 - 6t + 0,2t^3$, м.

Задача 1.2. При криволінійному русі радіус-вектор матеріальної точки визначається виразом:

а) $\vec{r} = 3t^2 \vec{i} - 2t \vec{j} + 2\vec{k}$, м; б) $\vec{r} = 3t \vec{i} + (10 - 5t^2) \vec{j}$, м.

Знайти:

1. Рівняння швидкості $\vec{v}$ точки та значення v у момент часу $t = 5$ с.

2. Рівняння прискорення $\vec{a}$ точки і значення a в момент часу $t = 5$ с.
3. Переміщення точки за перші 5 с руху.
4. Середню швидкість за перші 5 с руху.
5. Середню швидкість за 5-у секунду руху.
6. Визначити момент часу, коли швидкість дорівнює нулю. Знайти координату точки в цей момент часу.
7. Шлях точки за перші 5 с руху.
8. Середню шляхову швидкість за 5 с від початку руху.
9. Накреслити графік залежності координати матеріальної точки від часу і графік шляху, який пройшла точка.

Задача 1.3. Швидкість матеріальної точки змінюється за законом:

а) $\vec{v} = 1\vec{i} + 2t\vec{j} + 3t^2\vec{k}$, м/с; б) $\vec{v} = 0,5t^2\vec{i} - 2t\vec{j} + 3\vec{k}$, м/с.

Знайти:

1. Рівняння руху $\vec{r}(t)$, якщо в початковий момент часу точка мала координати $(2, -3, 0)$ м.
2. Вектор переміщення точки $\Delta\vec{r}$ і його модуль $|\Delta\vec{r}|$ за перші 2 секунди руху.
3. Середню швидкість точки за перші 2 с.
4. Модуль швидкості v в момент часу $t = 2$ с.
5. Рівняння прискорення $\vec{a}$ точки і модуль a в момент часу $t = 2$ с.

1.3 Завдання по темі

Умова 1.1. З вежі висотою $H = 100$ м горизонтально кинуто камінь зі швидкістю $v_0 = 15$ м/с.

Умова 1.2. З вежі висотою $H = 80$ м вгору під кутом $\alpha = 35^\circ$ до горизонту кинутий камінь зі швидкістю $v_0 = 15$ м/с.

Умова 1.3. Камінь почав падати з гелікоптера, що рухався на висоті $H = 500$ м поступально зі швидкістю $v_{0x} = 40$ м/с.

Умова 1.4. Камінь кинули з рівня Землі під кутом $\alpha = 60^\circ$ до горизонту зі швидкістю $v_0 = 30$ м/с.

Записати:

Кінематичне рівняння руху каменю $\vec{r}(t)$ в системі відліку, яка пов'язана: а) із Землею; б) з точкою кидання.

Рівняння швидкості $\vec{v}(t)$.

Рівняння траєкторії каменю $y(x)$.

Знайти:

1. Який час t_n камінь буде в русі?
2. На якій відстані S від точки кидання в горизонтальному напрямку він впаде на землю?
3. Швидкість каменя v через 2 с руху.
4. Який кут ϕ складе траєкторія каменя з горизонтом через 3 с руху? У момент падіння?
5. Нормальне і тангенціальне прискорення каменя через 2 с руху.
6. Радіус кривизни R траєкторії руху каменя через 2 с від початку руху.

1.4 Алгоритм розв'язку задач з кінематики

Прямолінійний рівноприскорений рух.

1. Запишіть рівняння для швидкості і координати матеріальної точки в обраній Вами системі координат.
2. Уважно перечитайте умову завдання. Запишіть дані рівняння з урахуванням початкових умов, або підставте відомі величини, що відповідають обраній системі координат.
3. Цих рівнянь достатньо, щоб виконати завдання.

Криволінійний прискорений рух.

1. Якщо тіло рухається по деякій площині, то для опису такого руху необхідна пара систем рівнянь для координат і проекцій швидкості:

$$\begin{cases} x = x_0 + v_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2}; \\ v_x = v_{0x} + a_x t; \end{cases} \quad \begin{cases} y = y_0 + v_{0y}t + \frac{a_y t^2}{2}; \\ v_y = v_{0y} + a_y t. \end{cases}$$

Пам'ятайте, що швидкість має дві складові:

$$\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y \quad \text{і} \quad \begin{cases} v_{0x} = v_0 \cos \alpha; \\ v_{0y} = v_0 \sin \alpha \end{cases},$$

де α – кут початкового напрямку руху тіла (рис. 1.1).

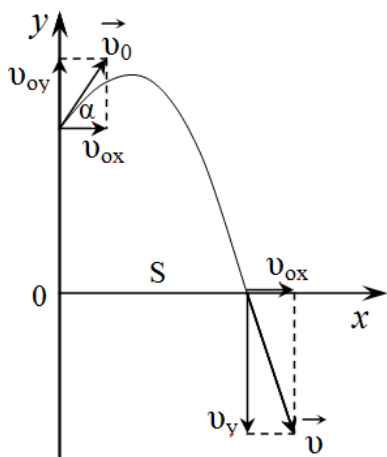


Рисунок 1.1

2. Уважно перерахуйте умову і запишіть дані рівняння з урахуванням початкових умов в обраній системі координат (або підставте відомі значення з умови, попередньо перевіривши, щоб одиниці виміру всіх величин були в СІ).

3. Врахуйте, що рівняння руху по осях ОХ і ОУ пов'язані часом. Наприклад, якщо тіло було якимось чином кинуте і впало на землю за деякий час t , то координата y в момент падіння, швидше за все, визначена умовою завдання (якщо система відліку пов'язана з землею, то $y = 0$) – це

дозволить знайти час падіння. Координата x за даний час буде визначена, як дальність польоту S .

4. Якщо тіло кинуте вгору, то в точці максимального підйому складова швидкості $v_y = 0$ (з цього можна знайти час підйому).

5. Якщо тіло кинуте із Землі і впало на Землю, то час підйому дорівнює часу падіння.

6. Якщо рух відбувається тільки під дією сили тяжіння, то прискорення, з яким рухається тіло ($g = 9,81 \text{ м/с}^2$), направлено вертикально вниз (найчастіше уздовж осі ОУ) і тоді тільки воно

визначає нормальну і тангенціальну складові $\vec{g} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$. При цьому $a_x = 0$.

7. Радіус кривизни траєкторії руху знаходять зі значення нормального прискорення, яке визначають з рівняння

$$a_n = \sqrt{g^2 - a_\tau^2}.$$

8. Рівняння траєкторії $y(x)$ знаходять шляхом виключення часу t з рівнянь координат (так як рух вздовж осі ОХ рівномірний, то час краще виразити з рівняння x і підставити його в рівняння y).

Тема 2. ДИНАМІКА ПОСТУПАЛЬНОГО РУХУ

2.1 Основні теоретичні положення

Сила – векторна величина, що є мірою взаємодії матеріальних тіл.

Інерція – властивість тіл зберігати стан спокою або рівномірного прямолінійного руху, або – властивість тіл опиратися зміні свого стану.

Маса – міра інертності тіл.

Закон інерції (1-й закон Ньютона): всяке тіло зберігає стан спокою або рівномірного прямолінійного руху до тих пір, поки вплив з боку інших тіл не змусить його змінити цей стан.

З 1-го закону випливає можливість існування інерційних систем відліку (ІСВ), в яких, якщо на тіло не діють інші тіла, воно або зберігає стан спокою, або рухається рівномірно і прямолінійно. Інакше, прямолінійний рівномірний рух не вимагає для своєї підтримки ніякого впливу.

Кількість руху (імпульс) – динамічна характеристика рухомого тіла, векторна величина, що чисельно рівна добутку маси тіла на його швидкість:

$$\vec{p} = m\vec{v}.$$

2-ий закон Ньютона: зміна кількості руху за будь-який нескінченно малий проміжок часу дорівнює елементарному імпульсу сили

$$d\vec{p} = \vec{F}dt.$$

Якщо маса тіла не змінюється, то відповідно до принципу незалежності дії сил:

$$m\vec{a} = \sum_i \vec{F}_i,$$

де $\vec{F}_i$ – сили, що діють на тіло.

3-ій закон Ньютона: сили, з якими діють один на одного взаємодіючі тіла, рівні за величиною і протилежні за напрямком

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}.$$

3-ій закон не виконується при взаємодії рухомих електричних зарядів, в неінерційних системах та в релятивістській механіці.

Динамічне рівняння руху: диференціальне рівняння 2-го порядку $m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t)$, з якого за відомих початкових умов $\vec{r}(0)$ і $\vec{v}(0)$ можна отримати кінематичне рівняння руху $\vec{r} = \vec{r}(t)$. Зворотнє завдання динаміки: за відомим рівнянням руху визначають силу, що діє на тіло.

Механічна система: сукупність матеріальних точок (тіл), що знаходяться у взаємодії, згідно із 3-ім законом Ньютона.

Центр інерції системи: точка всередині системи, радіус-вектор якої визначається за формулою $\vec{r}_c = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i}$. Для тіл

правильної форми ця точка збігається з геометричним центром.

Теорема про рух центру інерції: центр інерції механічної системи рухається як матеріальна точка, маса якої дорівнює масі всієї системи і на яку діє сила, що дорівнює головному вектору зовнішніх сил, прикладених до системи

$$d\vec{p}_c = \vec{F} dt.$$

Замкнута механічна система: якщо на систему не діють зовнішні сили. Систему можна також вважати замкнутою, якщо головний вектор зовнішніх сил тотожно дорівнює нулю, або сили внутрішньої взаємодії набагато більші за зовнішні.

Закон збереження кількості руху: кількість руху замкнутої системи не змінюється з часом. Інакше, за будь-яких процесів руху, що відбуваються в замкнутій системі, швидкість її центру інерції залишається незмінною:

$$\sum_i \vec{p}_i = const.$$

Даний закон є наслідком властивості простору – його однорідності. Це означає, що паралельне перенесення в ньому замкнутої системи, як цілого, не повинно відбиватися на фізичних властивостях системи і законах її руху.

Сили в механіці:

Сила гравітаційної взаємодії $\vec{F} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$, де G – гравітаційна стала.

Сила тяжіння $\vec{F} = m\vec{g}$ – сила гравітаційної взаємодії тіла масою m з Землею, направлена до центру Землі, де $\vec{g}$ – прискорення вільного падіння¹. На рівні моря $g_0 = G \frac{m_{\text{Землі}}}{R_{\text{Землі}}^2}$. На середніх широтах $g = 9,81 \text{ м/с}^2$.

Сила реакції опори $\vec{N}$ – спрямована перпендикулярно поверхні опори. **Сила натягу підвісу** (нитки) $\vec{T}$. Згідно з 3-ім законом Ньютона ці сили є силами протидії з боку опори або підвісу.

Сила тертя ковзання $F_{\text{тр}} = \mu N$; спрямована протилежно напрямку руху тіла. Коефіцієнт тертя μ для тіла, що рухається по деякій поверхні, визначається експериментально за кутом α_0 нахилу площини поверхні до лінії горизонту, при якому тіло починає зісковзувати з неї: $\mu = \tan \alpha_0$.

Сила опору при русі тіла у в'язкому середовищі $\vec{F}_c = -r \vec{v}$, де r – коефіцієнт опору, що залежить від в'язкості середовища і форми тіла, що рухається.

Сила пружності (закон Гука) $F = -kx$, де x – абсолютна деформація тіла, k – коефіцієнт пружності.

Сила тяги – визначена деяким пристроєм і джерелом енергії (робочим тілом і кількістю теплоти, яку можна перетворити в корисну роботу). Її дія можлива тільки за наявності сили тертя, яка утворює пару сил, що приводить тіло в рух.

Вага тіла – сила, з якою тіло діє на опору чи підвіс $\vec{P} = -\vec{N}$, або $\vec{P} = -\vec{T}$. Стан невагомості – вага тіла дорівнює нулю.

¹ У такому трактуванні нехтують обертовим рухом Землі.

2.2 Завдання на визначення

Задача 2.1. Кінематичне рівняння руху тіла масою $m = 100$ г має вигляд:

а) $\vec{r} = 3t^2\vec{i} - 2t\vec{j} + 2\vec{k}$, м; б) $\vec{r} = 3t\vec{i} + (10 - 5t^2)\vec{j}$, м;

в) $\vec{r} = 5t^2\vec{i} + 5t^2\vec{j} + 3\vec{k}$, м

Знайти:

1. Рівняння діючої сили $\vec{F}(t)$.
2. Напрямок та значення сили в момент часу $t = 5$ с.
3. Зміну імпульсу тіла за 5-у секунду руху.

Задача 2.2. На нерухоме тіло масою $m = 100$ г, що знаходиться в точці з координатами $(0, 3, -5)$, м починає діяти сила а) $\vec{F} = -5\vec{i} + 8\vec{j}$, Н; б) $\vec{F} = 2t\vec{i} - 3\vec{j}$, Н.

Знайти:

1. Закон зміни швидкості тіла $\vec{v}(t)$.
2. Кінематичне рівняння руху $\vec{r}(t)$. Положення тіла через 5 с від початку дії сили.
3. Зміну імпульсу тіла за 5-у секунду руху.

2.3 Завдання по темі

Умова 2.1. Автомобіль масою $m = 1$ т рухався зі швидкістю $v = 72$ км/год, коли вимкнули двигун. Коефіцієнт тертя коліс об дорогу $\mu = 0,1$.

Знайти:

1. Прискорення уповільненого руху.
2. Який шлях пройде автомобіль до зупинки.
3. Час руху до зупинки.
4. Якою повинна бути сила тяги, щоб розвинути таку ж швидкість за 1 хвилину?

Умова 2.2. Брусок масою $m = 200$ г знаходиться на похилій площині, що утворює з горизонтом кут $\alpha = 30^\circ$.

Знайти:

1. При якому граничному значенні коефіцієнта тертя μ_0 тіло почне ковзати вниз?

2. За умови, що коефіцієнт тертя $\mu = 0,1$, яку силу потрібно прикласти до тіла, щоб воно:

- а) залишалося у стані спокою;
- б) рухалося рівномірно вгору;
- в) рухалося рівномірно вниз;
- г) рухалося рівноприскорено вгору з прискоренням $a = 0,2 \text{ м/с}^2$;
- д) рухалося рівноприскорено вниз з прискоренням $a = 2 \text{ м/с}^2$?

Умова 2.3-А. Через невагомий і нерухомий блок перекинута невагома, нерозтяжна нитка, до кінців якої прикріплено два тіла з масами $m_1 = 2 \text{ кг}$ і $m_2 = 1,5 \text{ кг}$ (рис 2.1 – 2.4). Коефіцієнт тертя тіл з поверхнею $\mu = 0,1$. Тертя в блоці відсутнє.

Визначити силу натягу нитки T і прискорення a , з яким рухаються тіла.

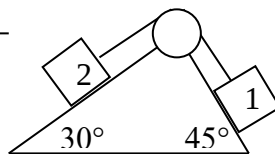
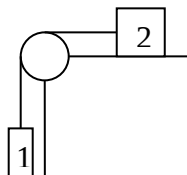
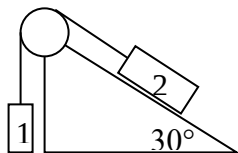
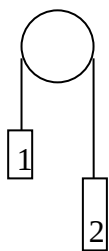


Рисунок 2.1

Рисунок 2.2

Рисунок 2.3

Рисунок 2.4

Умова 2.3-Б*. За рисунками 2.2 і 2.4, **знайти** відношення мас тіл m_2/m_1 при якому тіло 2:

- а) буде опускатися;
- б) буде підніматися;

в) залишитися в спокої.

Умова 2.4. Ліфт починає (закінчує) рух вгору (вниз) з прискоренням $a = 0,2 \text{ м/с}^2$. **Знайти** в цей момент вагу P пасажира, маса якого $m = 80 \text{ кг}$.

Умова 2.5. Літак робить «мертву петлю» радіусом $R = 500 \text{ м}$ з постійною швидкістю $v = 360 \text{ км/год}$. Маса пілота $m = 80 \text{ кг}$. **Знайти** вагу пілота P у

- а) верхній;
- б) нижній;
- в) середній точці петлі.

Вказати напрям вектора $\vec{P}$.

2.4 Алгоритм роз'язку задач з динаміки

1. Відповідно до умов задачі зобразіть схематично тіло, що рухається.

2. Позначте всі сили, що діють на тіло. Точка прикладання сил – центр інерції.

3. Оберіть систему координат, початок якої збігається з центром інерції тіла, вісь OX – з напрямком руху, OY – перпендикулярна OX .

4. Якщо напрям сили не збігається з напрямком обраних осей, визначте проекції сили на осі.

5. Якщо тіло знаходиться на похилій площині, то сила тертя спрямована у протилежний бік від проекції сили тяжіння на напрям можливого руху.

6. При русі сила тертя та сила опору завжди спрямована у протилежний бік руху.

7. Запишіть рівняння 2-го закону Ньютона у векторній формі і в проекціях на осі координат. Якщо напрям сили не збігається з віссю координат, її записують зі знаком мінус. Далі вирішуйте рівняння, щодо невідомих та згідно з умовами.

8. Пам'ятайте, що для випадку горизонтальної площини можна користуватися цими ж рівняннями, тільки кут $\alpha = 0^\circ$.

Приклад: рух тіла вгору з прискоренням по похилій площині (рис. 2.5).

Основне рівняння динаміки у векторній формі:

$$m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{тер}} + \vec{F}_{\text{тяги}} = m\vec{a}.$$

У проекціях на обрані осі координат:

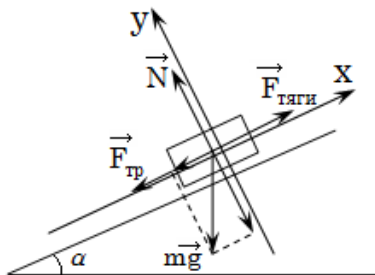


Рисунок 2.5

$$\begin{cases} F_{\text{тяги}} - mg_x - F_{\text{тр}} = ma, \\ N - mg_y = 0. \end{cases}$$

З другого рівняння:

$$N = mg \cos \alpha.$$

Сила тертя:

$$F_{\text{тер}} = \mu N = \mu mg \cos \alpha.$$

У подальшому з цих рівнянь можна знаходити невідомі згідно з умовою.

Якщо рухаються тіла, які утворюють систему, то рівняння руху записується для кожного тіла окремо, об'єднувати ці рівняння буде тільки сила натягу зчеплення (внутрішня сила взаємодії), яка прикладена до кожного тіла. Осі координат і їх напрям для кожного тіла можуть бути при цьому незалежними один від одного.

Тема 3. КІНЕМАТИКА І ДИНАМІКА ОБЕРТАЛЬНОГО РУХУ

3.1 Основні теоретичні положення

Обертальним називають такий вид руху, при якому всі точки тіла рухаються по колах, центри яких лежать на одній прямій, яка називається **миттєва² вісь обертання**.

Кутове переміщення $\Delta\vec{\varphi}$ – псевдовектор, який чисельно дорівнює куту обертання радіус-вектора точки за час Δt і спрямований в бік поступальної ходи правого гвинта, якщо обертання ручки гвинта збігається з напрямком руху точки.

Кутова швидкість: $\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$. Напрямок $\vec{\omega}$ збігається з напрямком кутового переміщення $\Delta\vec{\varphi}$.

Кутове прискорення: $\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$. Якщо напрямок вектора $\vec{\varepsilon}$ збігається з напрямком $\vec{\omega}$, то обертання прискорене, якщо ні, то уповільнене.

Лінійна швидкість пов'язана з кутовою швидкістю:.

$$\vec{v} = [\vec{r}, \vec{\omega}].$$

При рівномірному обертанні вводять такі характеристики:
період T – час повного оберту;

частота n – кількість обертів за одиницю часу: $n = \frac{1}{T}$;

кутове переміщення за період $\Delta\varphi = 2\pi$, тоді кутову швидкість ω називають **циклічна частота**: $\omega = \frac{2\pi}{T}$ і $\omega = 2\pi n$.

Момент сили відносно точки O – псевдовектор $\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}]$, модуль якого $M = rF \sin \alpha$, де $\vec{r}$ – радіус-вектор точки прикладання сили F , α – кут між радіус-вектором точки

² Передбачається, що при обертанні центр мас тіла може рухатися поступально

прикладання сили і напрямком сили. Момент сили напрямлений перпендикулярно до площини, в якій лежать вектори $\vec{r}$ та $\vec{F}$ за правилом правого гвинта (при суміщенні вектора $\vec{r}$ із $\vec{F}$ проти годинникової стрілки поступальний рух гвинта покаже напрямок вектора $\vec{M}$).

Момент імпульсу матеріальної точки – псевдовектор $\vec{L} = [\vec{r}, m\vec{v}]$, модуль якого $L = r m v \sin \alpha$, де $\vec{r}$ – радіус-вектор матеріальної точки. Напрямок моменту імпульсу: перпендикулярно площині, в якій лежать вектори $\vec{r}$ та $m\vec{v}$ за правилом правого гвинта.

Основне рівняння динаміки обертального руху (закон зміни моменту імпульсу) системи матеріальних точок:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M},$$

де $\vec{L}$ – момент імпульсу системи матеріальних точок,

$\vec{M}$ – головний вектор моменту зовнішніх сил.

Закон збереження моменту імпульсу системи матеріальних точок: якщо результуючий момент всіх зовнішніх сил, прикладених до системи, відносно будь-якої нерухомої осі тотожно дорівнює нулю, то момент імпульсу системи відносно тієї ж осі не змінюється з часом.

Закон є наслідком ізотропності простору. Це означає, що при повороті в ньому замкнутої системи, як цілого, її фізичні властивості і закони руху не змінюються.

Момент інерції J – міра інертності тіла при обертальному русі. Величина, що залежить від маси тіла і від того, як маса розподілена навколо осі обертання, тобто від форми тіла та положення осі обертання.

Момент інерції **матеріальної точки**, що рухається по круговій траєкторії радіуса R : $J = m R^2$, де m – маса точки.

Момент інерції **системи матеріальних точок** відносно центра обертання: $J = \sum_i m_i R_i^2$.

Момент інерції **твердого тіла** відносно осі обертання:

$$J = \int_m r^2 dm.$$

Моменти інерції J_c тіл, геометрично правильної форми, відносно осі, що проходить через центр інерції та співпадає з віссю симетрії тіла, представлені в таблиці:

тонке кільце радіуса R	mR^2	диск	$1/2 mR^2$
стрижень довжиною l	$1/12 ml^2$	куля	$2/5 mR^2$

Теорема Штейнера – момент інерції J , відносно довільної осі, дорівнює сумі моменту інерції J_c відносно осі, що паралельна даній і проходить через центр інерції тіла, та добутку маси тіла m на квадрат відстані d^2 між осями

$$J = J_c + md^2.$$

Момент імпульсу тіла, що обертається відносно осі z :

$$L_z = J_z \omega,$$

де J_z – момент інерції тіла, відносно тієї ж осі z ,

ω – кутова швидкість обертання.

Основне рівняння обертального руху твердого тіла відносно осі z , якщо момент інерції тіла J_z не змінюється з часом:

$$J_z \varepsilon = M_z,$$

де ε – кутове прискорення,

M_z – проекція моменту сили на вісь z .

З урахуванням останнього рівняння **закон збереження моменту імпульсу** для розв'язування задач застосовують у вигляді:

$$\sum_i J_{iz} \omega_i = \text{const},$$

де J_{iz} – моменти інерції складових частин системи, які обертаються зі швидкістю ω_i .

При вільному обертанні тіла (тобто тіло не закріплено жорстко на осі) вісь обертання мимовільно встановлюється так,

що проходить через центр інерції і момент інерції відносно цієї осі має максимальне або мінімальне значення.

3.2 Завдання на визначення

Задача 3.1. Матеріальна точка рухається по колу постійного радіуса $R = 0,2$ м так, що її радіус-вектор з деяким напрямком утворює кут, що змінюється з часом за законом:

а) $\varphi = 2t + 0,1t^3$, рад ; б) $\varphi = 5t - 0,4t^2$, рад.

Знайти:

1. Кутову швидкість ω руху через 2 с після початку руху.
2. Кутове прискорення ϵ руху через 2 с після початку руху.
3. Тангенціальне і нормальне прискорення через 2 с після початку руху.
4. Зміну тангенціального прискорення за одиницю часу.
5. Повне прискорення в момент часу $t = 2$ с.
6. Кут, що утворює вектор повного прискорення a з радіусом кола R у момент часу $t = 2$ с.

Задача 3.2. Однорідний диск радіусом $R = 0,2$ м і масою $m = 5$ кг обертається навколо осі, що проходить через його центр перпендикулярно до його площини. Залежність кутового переміщення задається рівнянням:

а) $\varphi = 6t + 0,05t^2$, рад. б) $\varphi = 5t^2 - 0,1t$, рад.

Знайти:

1. Момент інерції диска J .
2. Частоту обертання n диска через 5 с.
3. Кутове прискорення ϵ .
4. Дотичну силу F , прикладену до краю диска.
5. Момент сил гальмування M , якщо через $t_1 = 10$ с від початку руху дотична сила перестала діяти, а диск зупинився за $t_2 = 20$ с.
6. Скільки обертів зробив диск до зупинки за умови пункту 5.

3.3 Завдання по темі

Умова 3.1. Тіло: а) колесо; б) диск; в) куля масою $m = 4$ кг радіусом $R = 0,5$ м обертаючись рівносповільнено навколо осі, що проходить через центр інерції, змінило частоту обертання від $n_1 = 300$ об/хв до $n_2 = 180$ об/хв за час $t = 1$ хв.

Знайти:

1. Кутове прискорення ε колеса (диска, кулі).
2. Момент інерції колеса (диска, кулі).
3. Момент сил гальмування M .
4. Час до повної зупинки.
5. Кількість обертів N , зроблених колесом (диском, кулею) до повної зупинки.

Умова 3.2. Через блок, масою $m = 0,5$ кг і радіусом $R = 5$ см (див. рис. 2.1 – 2.4), перекинута невагома нерозтяжна нитка до кінців якої прикріплено два тіла з масами $m_1 = 2$ кг і $m_2 = 1,5$ кг. Коефіцієнт тертя тіл об поверхню $\mu = 0,1$. Для варіантів:

- а) тертя в блоці відсутнє;
- б) під час обертання діє момент сил тертя $M_{\text{тер}} = 0,049$ Н·м

Знайти:

1. Силу натягу T_1 і T_2 ниток.
2. Прискорення a , з яким рухаються тіла.

3.4 Алгоритм розв'язання умови 2

У цьому завданні маємо систему 3-х рухомих тіл, тому для кожного з них записують рівняння руху: 2-ий закон Ньютона для поступального руху вантажів і основне рівняння обертального руху для блоку.

Наприклад, для тіл на рис. 2.1 рівняння руху мають вигляд:

$$\begin{cases} \vec{T}_1 + m_1 \vec{g} = m_1 \vec{a}; \\ \vec{T}_2 + m_2 \vec{g} = m_2 \vec{a}; \\ \vec{M} = J \vec{\varepsilon} \end{cases}$$

Для запису в скалярній формі даних рівнянь, обирають осі, напрям яких збігається з напрямком руху вантажів.

На блок діють сили натягу T_1 і T_2 , тоді момент цих сил $M = (T_1 - T_2) \cdot R$ (знак моменту рушійної сили позитивний, яка гальмує – негативний). За умовою $m_1 > m_2$, тому рушійною силою буде сила тяжіння першого вантажу.

Зв'язок лінійного і кутового прискорення $\varepsilon = a / R$.

Далі розв'язують систему рівнянь щодо невідомих.

Тема 4. ЗАКОНИ ЗБЕРЕЖЕННЯ ЕНЕРГІЇ, ІМПУЛЬСУ, МОМЕНТУ ІМПУЛЬСУ

4.1 Основні теоретичні положення

Закон збереження імпульсу (кількості руху): імпульс замкнутої системи не змінюється з часом. Тобто, за будь-яких переміщеннях, що відбуваються в замкнутій системі, швидкість її центру інерції є величина стала:

$$\sum_i \vec{p}_i = const.$$

Закон збереження моменту імпульсу системи матеріальних точок: якщо результуючий момент всіх зовнішніх сил, прикладених до системи, відносно будь-якої нерухомої осі, тотожно дорівнює нулю, то момент імпульсу системи відносно тієї ж осі не змінюється з часом:

$$\sum_i J_i \omega_i = const.$$

Робота – кількісна характеристика зміни механічного руху тіла в процесі силової взаємодії. При переміщенні з точки 1 в точку 2:

$$A = \int_1^2 (\vec{F}, d\vec{r}), \text{ або } A = \int_1^2 F \cos \alpha dr,$$

де α – кут між вектором сили $\vec{F}$ і переміщенням тіла $d\vec{r}$.

Потужність – швидкість здійснення роботи:

$$N = \frac{dA}{dt} = (\vec{F}, \vec{v}).$$

Енергія – скалярна фізична величина, що є єдиною мірою різних форм руху матерії і кількісною мірою переходу руху матерії з одних форм в інші.

Кінетична енергія (E_k) – міра механічного руху тіла, визначається роботою, яку може виконати тіло в процесі свого гальмування. Кінетичній енергії притаманна адитивність, тобто

енергія системи тіл, що рухаються, дорівнює сумі енергій всіх тіл, що складають дану систему.

$$\text{При поступальному русі } E_{kt} = \frac{mv^2}{2}.$$

$$\text{При обертальному русі } E_{kr} = \frac{J\omega^2}{2}.$$

Внаслідок адитивності енергії, повна кінетична енергія тіла, що знаходиться в складному поступально-обертальному русі (наприклад, колесо велосипеда, яке рухається поступально):

$$E_k = \frac{mv^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2}.$$

Якщо робота при переміщенні з точки 1 у точку 2 не залежить від форми траєкторії, то силу, під дією якої відбувається переміщення, називають **консервативною**. Тіло у полі таких сил має **потенціальну енергію**, і робота консервативних сил виконується за рахунок зменшення потенціальної енергії тіла $dA = -dE_n$.

Для консервативних сил циркуляція за довільним замкненим контуром l :

$$\oint (\vec{F}, d\vec{l}) \equiv 0.$$

Потенціальна енергія гравітаційної взаємодії тіл масою m_1 і m_2 :

$$E_n = -G \frac{m_1 m_2}{r} + C,$$

де $G = 6,673 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3 \text{ кг}^{-1} \text{ с}^{-2}$ – гравітаційна стала,

r – відстань між центрами мас,

C – константа інтегрування, яку визначають за граничними умовами.

Потенціальна енергія в полі тяжіння Землі поблизу поверхні виражається формулою:

$$E_n = mgh,$$

де m – маса тіла,

g – прискорення вільного падіння,

h – висота положення центру мас тіла над довільно вибраним нульовим рівнем.

Потенціальна енергія пружно деформованого тіла: $E_n = \frac{kx^2}{2}$,

де x – абсолютна деформація,

k – коефіцієнт пружності, що залежить від розмірів і матеріалу тіла.

Повна механічна енергія замкнутої системи тіл:

$$E = E_k + E_n.$$

Консервативна система – система тіл, внутрішні сили взаємодії між якими консервативні, а всі зовнішні сили стаціонарні і консервативні.

Дисипативні сили – сили тертя і опору – зменшують повну механічну енергію системи і перетворюють її у внутрішню енергію тіл.

Закон збереження механічної енергії: повна механічна енергія консервативної системи не змінюється з часом.

Загальнофізичний закон збереження енергії: в замкнутій системі, за будь-яких взаємодій, енергія може переходити з одних видів в інші і передаватися від одного тіла до іншого, але її загальна кількість залишається сталою.

4.2.1 Завдання по темі. Закон збереження енергії

Умова 4.1-А. Тіло масою $m = 1$ кг кинуто зі швидкістю $v_0 = 15$ м/с вертикально вгору з висоти $H = 10$ м.

Умова 4.1-Б. Тіло масою $m = 1$ кг кинуто з висоти $H = 50$ м зі швидкістю $v_0 = 15$ м/с горизонтально.

Умова 4.1-В. Тіло масою $m = 1$ кг кинуто зі швидкістю $v_0 = 15$ м/с з висоти $H = 50$ м під кутом $\alpha = 30^\circ$ до горизонту.

Знайти:

1. Повну енергію тіла.
2. Залежність кінетичної енергії від часу.

3. Кінетичну енергію тіла через $t = 1$ с.
4. Залежність потенціальної енергії від часу.
5. Потенціальну енергію тіла через $t = 1$ с.
6. Момент часу, в який кінетична енергія тіла дорівнює потенціальній енергії.

Умова 4.2-А. Тіло масою $m = 0,5$ кг, яке рухалося по горизонтальній ділянці зі швидкістю $v_0 = 15$ м/с, починає підніматися по інерції на похилу площину, кут нахилу якої 30° . Коефіцієнт тертя $\mu = 0,1$.

Умова 4.2-Б. Тілу: а) куля; б) кільце; в) однорідний циліндр масою $m = 1$ кг, радіусом $R = 0,1$ м, що знаходиться біля основи похилої площині, надають початковий імпульс. У результаті тіло починає котитися без ковзання вгору зі швидкістю $v_0 = 3$ м/с. Площина утворює з горизонтом кут $\alpha = 20^\circ$. При русі діє постійний за модулем момент сили тертя кочення $M_{\text{тер}} = 0,1$ Н·м.

Знайти:

1. Механічну енергію тіла в початковий момент часу.
2. Який шлях пройде тіло по похилій поверхні, якщо тертя відсутнє?
3. Який шлях пройде тіло по похилій поверхні до зупинки з урахуванням тертя?
4. Кількість теплоти, яке виділилося в результаті тертя під час руху вгору.
5. З якою швидкістю тіло скотиться вниз до основи похилої поверхні?
6. Який шлях після скочування пройде тіло по горизонтальній поверхні до зупинки?

Умова 4.3. Під дією сили тяжіння вантажу масою $m = 500$ г пружина розтягується на 10 см.

Знайти:

1. Коефіцієнт пружності пружини.

2. Роботу A , яку потрібно виконати, щоб розтягнути пружину на $x = 5$ см.

3. Роботу $A_{\text{дод}}$, яку потрібно виконати, щоб розтягнути пружину ще на 5 см.

4. На скільки стиснеться пружина, що лежить на столі, якщо на неї летить кулька масою $m = 100$ г зі швидкістю $v = 10$ м/с.

5. На яку висоту підскочить кулька масою $m = 100$ г, що лежить на вертикально розташованій пружині, стиснутій на 10 см, якщо її відпустити.

Алгоритм рішення задач на закон збереження енергії

1. З'ясуйте з умови, чи є замкнута система тіл консервативною чи ні (тобто дайте відповідь на питання, чи діють сили тертя або опору).

2. Визначте повну механічну енергію системи у початковий момент часу.

3. Визначте повну механічну енергію системи в кінцевий момент часу і прирівняйте її до повної енергії в початковий момент часу за умови, що система консервативна. Далі розв'яжіть рівняння відносно невідомого.

4. Якщо система неконсервативна, то робота сил тертя (теплота, що виділилася в результаті тертя) додається до механічної енергії в кінцевий момент часу.

5. Якщо система незамкнута або діє сила тяги, то робота цих сил змінює кінетичну енергію, а отже і повну механічну енергію системи.

4.2.2 Завдання по темі. Закон збереження імпульсу

Умова 4.4-А. На рейках стоїть платформа масою $m_1 = 10$ т. На платформі закріплена гармата масою $m_2 = 5$ т, з якої робиться постріл а) уздовж рейок; б) під кутом $\alpha = 30^\circ$ до горизонту. Маса снаряда $m_3 = 100$ кг, його початкова швидкість відносно гармати $v_0 = 500$ м/с.

Умова 4.4-Б. Платформа з умови 4.4-А рухалася зі швидкістю $v = 9$ км/год і той же постріл зроблено уздовж рейок а) у напрямку руху платформи; б) проти напрямку руху платформи.

Знайти:

1. Швидкість платформи у перший момент після пострілу.
2. Кінетичну енергію снаряда в момент пострілу.
3. Зміну кінетичної енергії платформи.
4. Енергію порохового заряду.
5. Шлях, який пройде платформа до зупинки, якщо коефіцієнт тертя $\mu = 0,05$.

Умова 4.5. Платформа з піском загальної маси $m_1 = 10$ т а) стоїть на рейках; б) рухається зі швидкістю $v = 9$ км/год. У неї потрапляє снаряд $m_3 = 100$ кг, що рухався уздовж рейок зі швидкістю $v_0 = 500$ м/с.

Знайти:

1. Швидкість платформи після потрапляння в неї снаряда.
2. На скільки змінилася кінетична енергія платформи.
3. Шлях, який пройде платформа до зупинки, якщо коефіцієнт тертя $\mu = 0,05$.

Умова 4.6-А. Тіло масою $m_1 = 1$ кг рухається зі швидкістю $v_1 = 3$ м/с; тіло масою $m_2 = 1,5$ кг перебуває у стані спокою.

Умова 4.6-Б. Тіло масою $m_1 = 1$ кг рухається зі швидкістю $v_1 = 3$ м/с; тіло масою $m_2 = 1,5$ кг рухається зі швидкістю $v_2 = 2$ м/с а) в тому ж напрямку, що і тіло 1; б) назустріч.

Умова 4.6-В. Тіло масою $m_1 = 1$ кг рухається зі швидкістю $v_1 = 3$ м/с; тіло масою $m_2 = 1,5$ кг рухається у напрямку, що є під кутом $\alpha = 30^\circ$ до швидкості першого тіла.

Знайти:

1. Швидкість тіл u_1 і u_2 після зіткнення.
2. Кількість теплоти, що виділилася під час зіткнення, якщо зіткнення є центральним і а) пружним; б) непружним;

в) частково пружним з коефіцієнтом відновлення³ $\kappa = 0,8$.

Алгоритм рішення задач на закон збереження імпульсу

1. Оберіть систему координат, відносно якої буде записано рівняння.

2. У обраній системі координат, виходячи з умови, позначте імпульси всіх тіл, що складають замкнуту систему в початковий момент часу (до будь-якої взаємодії); запишіть їх суму, враховуючи знаки проекцій швидкостей тіл на осі системи координат.

3. Аналогічно запишіть суму імпульсів тіл після взаємодії. Якщо з умови завдання Ви не можете однозначно визначити напрям руху одного з тіл після взаємодії, позначте його швидкість позитивно. Тоді, якщо отриманий розв'язок має від'ємний знак, то напрям знайденої швидкості буде протилежним тому, котрий Ви обрали.

4. Прирівняйте імпульс системи до взаємодії до імпульсу системи після взаємодії.

5. Якщо цього рівняння для вирішення завдання не достатньо, запишіть рівняння закону збереження енергії за тим же принципом: сума кінетичних енергій тіл до взаємодії дорівнює сумі кінетичних енергій тіл після взаємодії (в разі пружних ударів); або: сума кінетичних енергій тіл до взаємодії дорівнює сумі кінетичних енергій тіл після взаємодії із доданням енергії деформації (в разі непружних взаємодій).

4.2.3 Завдання по темі. Закон збереження моменту імпульсу

Умова 4.7. Горизонтальна платформа масою $m = 100$ кг і радіусом $R = 1,5$ м обертається навколо вертикальної осі, що

³ Коефіцієнт відновлення κ чисельно дорівнює відносній швидкості тіл після удару до відносної швидкості тіл до удару

проходить через центр платформи, з частотою $n_1 = 4$ об/хв. Людина масою $m_0 = 60$ кг стоїть при цьому на краю платформи.

Знайти:

1. З якою частотою n_2 буде обертатися платформа, якщо:
 - а) людина перейде від краю платформи на 1 м ближче до центра;
 - б) людина перейде від краю платформи до її центра;
 - в) людина піде по краю платформи у напрямку її обертання зі швидкістю $v = 2$ м/с;
 - г) людина піде по краю платформи проти напрямку її обертання зі швидкістю $v = 2$ м/с
 - д) людина кине гирю масою $m = 2$ кг зі швидкістю $v = 20$ м/с по дотичній до платформи проти напрямку обертання;
 - е) людина зловить вантаж масою $m = 1$ кг, який летить на нього зі швидкістю $v = 20$ м/с.
2. Чому дорівнює зміна моменту імпульсу платформи?
3. Яку роботу при цьому виконає людина?

Алгоритм рішення задач на закон збереження моменту імпульсу

1. Оберіть систему відліку, відносно якої будуть визначатися моменти імпульсів тіл.
2. У відповідності до умови задачі визначте момент імпульсу системи у початковий момент часу. Для цього необхідно знайти момент інерції тіл, відносно осі обертання.
3. Запишіть момент імпульсу системи тіл після взаємодії. Врахуйте, що найчастіше, зміна моменту імпульсу відбувається внаслідок зміни моменту інерції, тому знайдіть момент інерції тіл після взаємодії.
4. Прирівняйте момент імпульсу системи тіл до взаємодії до моменту імпульсу після взаємодії. Знайдіть невідомі з цього рівняння.
5. Робота, яку виконає людина, піде на зміну кінетичної енергії тіл, що рухаються. Тому знайдіть кінетичну енергію системи тіл до взаємодії та після.

Приклад розв'язування умови 4.7-а) питання 1, 3

$$M = 100 \text{ кг}$$

$$R = 1,5 \text{ м}$$

$$n_1 = 10 \text{ об/мин}$$

$$m = 60 \text{ кг}$$

$$x = 1 \text{ м}$$

$$n_2 = ? \text{ А-?}$$

Людина і платформа утворюють замкнену систему тіл, тому можна використовувати закон збереження моменту імпульсу. У початковий момент часу момент імпульсу системи складався з моменту імпульсу людини

$$L_q = J_q \omega_1 = m R^2 2\pi n_1$$

і моменту імпульсу платформи

$$L_{пл} = J_{пл} \omega_1 = \frac{1}{2} M R^2 2\pi n_1.$$

У результаті переміщення людини її момент інерції змінився $J'_q = m(R-x)^2$, отже, змінився і момент інерції всієї системи $(J'_q + J_{пл})\omega_1 = (J'_q + J_{пл})\omega_2$.

У підсумку за законом збереження моменту імпульсу

$$(mR^2 + \frac{1}{2}MR^2)2\pi n_1 = (m(R-x)^2 + \frac{1}{2}MR^2)2\pi n_2,$$

звідки частота обертання платформи буде:

$$n_2 = \frac{(mR^2 + \frac{1}{2}MR^2)n_1}{(m(R-x)^2 + \frac{1}{2}MR^2)} = \frac{(60 + 0,5 \cdot 100) \cdot 1,5^2 \cdot 10}{(60 \cdot 0,5^2 + 0,5 \cdot 100 \cdot 1,5^2)} = 19,4 (\text{об/хв}).$$

Робота A , виконана людиною, буде дорівнювати зміні кінетичної енергії системи: $A = E_2 - E_1$, де $E = \frac{J\omega^2}{2}$ – кінетична енергія обертального руху.

Підставимо значення кінетичної енергії до та після взаємодії:

$$\begin{aligned} A &= \frac{(J'_q + J_{пл})\omega_2^2}{2} - \frac{(J_q + J_{пл})\omega_1^2}{2} = \\ &= 2\pi^2 \left[\left(m(R-x)^2 + \frac{1}{2}MR^2 \right) n_2^2 - \left(m + \frac{1}{2}M \right) R^2 n_1^2 \right] \end{aligned}$$

Обчислимо:

$$A = 2 \cdot 3,14^2 \left[(60(0,5)^2 + 0,5 \cdot 100 \cdot 1,5^2) \left(\frac{19,4}{60} \right)^2 - (60 + 50)1,5^2 \left(\frac{10}{60} \right)^2 \right] = 127,3 (\text{Дж})$$

Відповідь: $n_2 = 19,4$ об/хв, $A = 127,3$ Дж

Тема 5. КОЛИВАЛЬНИЙ РУХ

5.1 Основні теоретичні положення

Коливальним називають рух, при якому тіло залишається в обмеженому інтервалі відносно деякого положення, що визначається як стан рівноваги. Якщо кінематичні характеристики при цьому повторюються через один і той проміжок часу, то коливальний рух буде періодичним.

Період колювання T – час повного колювання, або час, за який фаза змінюється на 2π .

Гармонічне колювання – це колювання, яке відбувається за законом $x = A \cos(\omega t + \varphi_0)$.

Амплітудою колювання називається максимальна величина зміщення від положення рівноваги $|x_{\max}| = A$.

Фазою колювання називається аргумент $\varphi = \varphi_0 + \omega t$, який визначає частку (що дорівнює $\cos \varphi$), яку зміщення x становить від максимально можливого A ; φ_0 – початкова фаза колювань.

Частота колювань ν – величина, обернена періоду і визначає кількість колювань за одиницю часу.

Циклічна частота: $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$.

Швидкість руху точки при коливальному русі:

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega A \sin \omega t = \omega A \cos(\omega t + \frac{\pi}{2}).$$

Прискорення руху точки при коливальному русі:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A \cos \omega t = \omega^2 A \cos(\omega t + \pi).$$

Гармонічний осцилятор – це тіло, або система, яка при зміщенні від положення рівноваги відчуває дію зворотної сили F , пропорційної зміщенню x :

$$F = -kx,$$

де k – позитивна константа, що описує жорсткість системи.

Так як дана функціональна залежність подібна до закону Гука для пружної взаємодії, зворотну силу F називають **квазіпружною**.

Динамічне рівняння коливального руху є диференціальне рівняння 2-го порядку: $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$.

Фізичний маятник – осцилятор, який являє собою тверде тіло, що здійснює коливання у полі будь-яких сил відносно точки, яка не є центром мас цього тіла, або відносно нерухомої осі, перпендикулярної напрямку дії сил і не проходить через центр мас цього тіла.

Циклічна частота коливань фізичного маятника масою m : $\omega_0 = \sqrt{\frac{r_c mg}{J}}$, де r_c – відстань від осі до центру мас, J – момент інерції тіла відносно осі коливань.

Математичний маятник – матеріальна точка масою m , підвішена на довгій невагомій, нерозтяжній нитці, яка здійснює коливання у полі сил тяжіння. Циклічна частота малих коливань⁴ математичного маятника $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$.

Пружинний маятник – тіло масою m підвішене на пружині, коефіцієнт пружності якої k . Циклічна частота пружинного маятника: $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

Кінетична енергія гармонічного осцилятора:

$$E_{\text{кин}} = \frac{mv^2}{2} = \frac{m\omega^2 A^2 \sin^2 \omega t}{2} = \frac{m\omega^2 A^2}{4} \cdot [1 - \cos 2\omega t].$$

Потенціальна енергія гармонічного осцилятора:

$$E_{\text{пот}} = \frac{kx^2}{2} = \frac{kA^2 \cos^2 \omega t}{2} = \frac{m\omega^2 A^2}{2} \cdot \cos^2 \omega t = \frac{m\omega^2 A^2}{4} \cdot [1 + \cos 2\omega t].$$

⁴ Коливання математичного маятника будуть гармонічними за умови, якщо початковий кут відхилення не більше 7° . У цьому випадку $\sin \alpha \approx \alpha$ і коливання будуть лінійними

Повна енергія:

$$E = E_{\text{кин}} + E_{\text{пот}} = \frac{m\omega^2 A^2}{2} [\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t] = \frac{m\omega^2 A^2}{2}.$$

При додаванні однаконо напрямлених коливань рівної частоти ω , отримуємо гармонічне коливання $x = A \cos(\omega t + \varphi_0)$ такої ж частоти ω , амплітуда якого:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_{02} - \varphi_{01})}$$

$$\text{і початкова фаза } \varphi_0 = \arctg \frac{A_1 \sin \varphi_{01} + A_2 \sin \varphi_{02}}{A_1 \cos \varphi_{01} + A_2 \cos \varphi_{02}}.$$

При додаванні однаконо напрямлених коливань з близькими за значеннями частотами, рівняння результуючого коливання записують наступним чином:

$$x = 2A \cos \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \cdot \cos \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t = B \cos \omega t.$$

Коливальний рух, при якому амплітуда B періодично змінюється, називається **биттям**.

При додаванні взаємно перпендикулярних коливань однакової частоти, рівняння траєкторії має вигляд:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - \frac{2xy}{AB} \cos \Delta\varphi = \sin^2 \Delta\varphi.$$

Форма траєкторії залежить від різниці початкових фаз $\Delta\varphi$.

При різних частотах коливань, які додаються, вигляд траєкторії (фігура Ліссажу) залежить як від $\Delta\varphi$, так і від співвідношення частот. Задачі на знаходження рівняння траєкторії $y(x)$ розв'язуються шляхом виключення параметра часу t з рівнянь $x(t)$ і $y(t)$.

Рівняння затухаючих (вільних) коливань:

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0,$$

де $\delta = \frac{r}{2m}$ – коефіцієнт затухання.

У разі, якщо $\delta < \sqrt{\frac{k}{m}}$ розв'язок диференціального рівняння має вигляд: $x = A_0 e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi_0)$, тут $A_0 e^{-\delta t}$ – амплітуда затухаючого коливання, $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ – циклічна частота затухаючих коливань.

Логарифмічний декремент затухання:

$$\ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \delta T = \alpha.$$

Час релаксації (час, протягом якого амплітуда зменшується в $e = 2,718$ разів): $\tau = \frac{1}{\delta}$. $N_e = \frac{\tau}{T}$ – кількість коливань за час релаксації. $\alpha = \delta T = \frac{1}{\tau} \cdot T = \frac{1}{N_e}$.

Таким чином α – це фізична величина обернена до числа коливань N , після закінчення яких амплітуда зменшується в $e = 2,718$ разів.

Добротність системи при малому затуханні:

$$Q = \pi / \alpha = \pi N_e.$$

Якщо енергія коливальної системи зменшується з часом, тоді зміна енергії за час одного періоду визначається добротністю системи $\frac{E}{(-\Delta E)} = \frac{Q}{2\pi}$.

Коливання під дією зовнішньої періодичної сили $F_{вим} = F_0 \cos \Omega t$, що діє з частотою Ω , будуть **вимушеними**. Диференціальне рівняння таких коливань:

$$\ddot{x} + 2\delta \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \Omega t.$$

Розв'язок цього рівняння складається з двох незалежних розв'язків $x = x_{віль}(t) + x_{вим}(t)$. Вільні коливання $x_{віль}(t)$ будуть відбуватися з частотою $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ і припиняться після закінчення часу релаксації τ , а вимушені $x_{вим}(t)$ через час τ будуть встановленими з частотою Ω :

$$x = A \cos(\Omega t - \phi),$$

де A – амплітуда вимушених коливань; ϕ – зсув фази між дією змушуючої сили, та вимушеним коливанням.

Ці величини знаходять за формулами:

$$A = \frac{F_0}{m \sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2 \Omega^2}};$$

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{r \Omega A}{k A - m \Omega^2 A} = \frac{2 \delta \Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}.$$

Резонанс: явище різкого зростання амплітуди вимушених коливань, якщо частота Ω змушуючої сили знаходиться в області власної частоти, $\Omega \approx \omega_0$. Частота резонансу:

$$\Omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}.$$

Максимальна амплітуда резонансу:

$$A_{\text{рез}} \approx \frac{F_0}{m \cdot 2\delta \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} \approx \frac{F_0}{2m\delta \omega_0}.$$

Статичне зміщення системи під дією сили F_0 : $x_{\text{стат}} = \frac{F_0}{m \omega_0^2}.$

Таким чином $\frac{A_{\text{рез}}}{x_{\text{стат}}} = \frac{\omega_0}{2\delta} = Q$ – добротність, яка в цьому контексті показує у скільки разів амплітуда резонансу більша за статичне зміщення.

5.2 Завдання по темі

Умова 5.1-А. Кулька масою $m = 100$ г закріплена на пружині жорсткістю $k = 15,775$ Н/м розташований горизонтально. Її вивели з положення рівноваги на 5 см і відпустили.

Умова 5.1-Б. Кулька масою $m = 100$ г закріплена на горизонтальній пружині. Її вивели з положення рівноваги, надавши енергію $E = 20$ мДж. Максимальна сила, що діє на кульку $F_{\text{max}} = 1$ Н.

Умова 5.1-В. Кулька масою $m = 100$ г підвішена на штативі за допомогою невагомої, нерозтяжній нитки довжиною $l = 1$ м. Її вивели з положення рівноваги на 5 см і відпустили.

Умова 5.1-Г. Кулька масою $m_1 = 100$ г і радіусом $R = 5$ см закріплена на одному з кінців стрижня довжиною $l = 0,5$ м і масою $m_2 = 100$ г. За протилежний кінець стрижень шарнірно закріплений на штативі. Його вивели з положення рівноваги на кут $\alpha = 5^\circ$ і відпустили.

Знайти:

1. Період коливань кульки T .
2. Частоту коливань ν .
3. Рівняння руху кульки і зміщення через 2,2 с від початку руху.
4. Рівняння швидкості і швидкість через 2,2 с руху.
5. Рівняння прискорення і прискорення через 2,2 с руху.
6. Силу, що діє на кульку через 2,2 с від початку руху.
7. Повну енергію кульки відносно положення рівноваги.
8. Кінетичну енергію через 2,2 с від початку руху.
9. Потенціальну енергію через 2,2 с від початку руху.

Завдання 5.2. Знайти рівняння результуючого коливання у разі додавання однаково напрямлених коливань x_1 та x_2 , заданих рівняннями:

$$\text{а) } \begin{cases} x_1 = 5 \sin(2t + \pi/3); \\ x_2 = 2 \cos 2t. \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x_1 = 2 \sin(\pi t + \pi/4); \\ x_2 = 3 \sin(\pi t + \pi/2). \end{cases} \quad \text{в) } \begin{cases} x_1 = 2 \sin(2\pi t); \\ x_2 = 5 \sin(2\pi t + \pi/2). \end{cases}$$

Завдання 5.3. Знайти рівняння і намалювати траєкторію коливального руху, отриманого при додаванні взаємно перпендикулярних коливань:

$$\begin{array}{lll} \text{а) } \begin{cases} x = 2 \sin t; \\ y = 3 \cos t. \end{cases} & \text{б) } \begin{cases} x = \sin t; \\ y = 2 \sin(t + \pi/4). \end{cases} & \text{в) } \begin{cases} x = 3 \cos 2t; \\ y = 2 \sin t. \end{cases} \\ \text{г) } \begin{cases} x = 5 \sin t; \\ y = 2 \sin 2t. \end{cases} & \text{д) } \begin{cases} x = 5 \sin(t + \pi/3); \\ y = 2 \cos t. \end{cases} & \text{е) } \begin{cases} x = 5 \sin t; \\ y = 2 \cos 2t. \end{cases} \end{array}$$

Умова 5.4-А. Кульку масою $m = 100$ г, яка підвішена на невагомому стрижні довжиною $l = 0,5$ м, занурили в посудину з олією. Потім кульку вивели з положення рівноваги на 5 см і відпустили. Коефіцієнт опору руху кульки у даному середовищі $r = 0,05$ кг/с.

Умова 5.4-Б. Кульку масою $m = 100$ г, яка підвішена на пружині жорсткістю $k = 3,944$ Н/м, занурюють у в'язке середовище, в результаті чого пружина стискається на 3 см. Коефіцієнт опору руху $r = 0,02$ кг/с.

Знайти:

1. Коефіцієнт затухання.
2. Період власних коливань.
3. Період затухаючих коливань.
4. Декремент затухання.
5. У скільки разів зміниться амплітуда коливань за час п'яти повних коливань?
6. Скільки коливань N_e здійснить кулька за час релаксації?
7. За який час енергія кульки зменшиться у 8 разів?

Умова 5.5. На фізичний маятник масою $m = 100$ г, власна частота коливань якого $\omega_0 = 2\pi$, починає діяти періодична зовнішня сила:

а), $F = 5 \sin 3\pi t$ Н; б) $F = 3 \sin 4\pi t$, Н; в) $F = 6 \sin \pi t$, Н.

Коефіцієнт опору середовища $r = 0,2$ кг/с.

Знайти:

1. Амплітуду усталеного коливального руху.
2. Зсув фази між коливаннями і дією сили.
3. Рівняння вимушених коливань.
4. Резонансну частоту.
5. Амплітуду резонансу.

Завдання даної теми розв'язують строго за визначеннями і алгоритмів не потребують.

Тема 6. ПРУЖНІ ХВИЛІ

6.1 Основні теоретичні положення

Пружні хвилі – процес поширення коливань у просторі завдяки пружній взаємодії частинок середовища.

Хвильове поле – ділянка простору, всередині якого коливаються всі частинки середовища.

Фронт хвилі – межа, що відокремлює частинки, які коливаються від частинок ще не залучених до коливального руху. В однорідному середовищі напрямок поширення хвилі є перпендикулярним до фронту хвилі. За виглядом фронту хвилі розрізняють плоскі хвилі – фронт хвилі площина, сферичні та еліптичні хвилі.

Поздовжні хвилі – коливальний рух частинок відбувається вздовж напрямку поширення хвилі.

Поперечні хвилі – частинки коливаються в напрямку перпендикулярному поширенню хвилі. Такі хвилі поширюються тільки в твердих тілах, тому що в рідинах і газах не існує деформації зсуву.

Швидкість поширення хвиль – це швидкість руху фази (фазова швидкість). Для поздовжніх хвиль $v_{\text{позд}} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$, для поперечних $v_{\text{попер}} = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$. Тут ρ – густина середовища, E – модуль пружності, G – модуль зсуву.

У газах поширюються тільки поздовжні хвилі, швидкість яких

$$v = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} = \sqrt{\frac{\gamma p V}{m}} = \sqrt{\frac{\gamma R T}{\mu}},$$

де γ – показник адіабати,

T – температура,

μ – молярна маса,

R – універсальна газова стала.

У дисперсійних середовищах⁵, а також при накладанні декількох хвиль з близькими, за значенням, частотами, утворюється хвильовий пакет, який рухається з груповою швидкістю u

$$u = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda}.$$

Хвильове рівняння для плоскої хвилі, що поширюється вздовж напрямку ОХ:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2},$$

де ξ – зміщення частинок від положення рівноваги,

v – фазова швидкість хвилі.

Рівняння плоскої хвилі, що поширюється вздовж осі ОХ,:

$$\xi(x, t) = A \sin(\omega t - kx),$$

є розв'язком хвильового рівняння; тут ω – циклічна частота, k – хвильове число.

Фаза хвилі $\varphi = (\omega t - kx)$.

$$\text{Хвильове число } k = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{Tv} = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

Довжина хвилі λ – відстань між точками, що коливаються в однаковій фазі. Інакше, це відстань, на яку зміщується фаза за період.

Енергія пружної хвилі складається з кінетичної та потенціальної енергії частинок середовища, але тому що коливання частинок відбувається в різних фазах, вводять:

Густину енергії пружної хвилі

$$\varpi = \frac{\Delta W}{\Delta V} = \frac{1}{2} \rho \left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 + v^2 \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 \right].$$

Густина потоку енергії – потік енергії через одиничну поверхню, розташовану в даній точці перпендикулярно до напрямку переносу енергії.

⁵ Неоднорідне середовище, в якому швидкість розповсюдження хвиль залежить від частоти або довжини хвилі

Вектор густини потоку енергії (вектор Умова) $\vec{j} = \vec{\omega} \cdot \vec{U}$.

Інтенсивність хвиль – середня за період густина потоку енергії: $I = \langle j \rangle = \langle \omega \rangle v = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2 v$.

Стоячі хвилі – утворені в результаті накладання падаючої і відбитої хвиль. Рівняння стоячої хвилі $\xi = 2A \cos kx \cos \omega t$, де амплітуда $2A \cos kx$. Стояча хвиля енергію не переносить.

6.2 Завдання по темі

Умова 6.1-А. По торцю довгого стрижня, густина якого $\rho = 11,34 \text{ г/см}^3$ і модуль пружності $E = 1,8 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2$ б'ють вібруючим молоточком, що коливається за законом:

а) $\xi = 0,5 \sin 1500 \pi t$, мм; б) $\xi = 0,2 \cos 3000 \pi t$, мм;

в) $\xi = 0,01 \sin(2000 \pi t + \pi/3)$, см.

Умова 6.1-Б. У газопроводі знаходиться джерело звукової хвилі, що коливається за законом:

а) $\xi = 0,5 \sin 150 \pi t$, см; б) $\xi = 0,2 \cos 300 \pi t$, см.

Показник адиабати повітря $\gamma = 1,4$, температура 27°C .

Знайти:

1. Швидкість пружних хвиль у даному середовищі.
2. Довжину хвилі і хвильове число.
3. Записати рівняння поздовжніх пружних хвиль, що поширюються у стрижні (газопроводі).
4. Фазу точки, що знаходиться на відстані $x = 0,5 \text{ м}$ від джерела звукової хвилі в момент часу $t = 1 \text{ с}$.
5. Різницю фаз точок, віддалених одна від одної на $0,3 \text{ м}$.
6. Швидкість точки, що знаходиться на відстані $x = 0,5 \text{ м}$ від джерела поздовжньої хвилі в момент часу $t = 1 \text{ с}$.
7. Енергію, яку переносить хвиля через одиничну поверхню за одиницю часу.

Завдання даної теми розв'язують строго за визначеннями і алгоритмів не потребують.

Тема 7. РЕЛЯТИВІСТСЬКА МЕХАНІКА

7.1 Основні теоретичні положення

Постулати Спеціальної теорії відносності (СТВ):

– в інерціальних системах відліку всі фізичні процеси за однакових умов протікають однаково; всі закони природи та рівняння, що їх описують, є інваріантні, тобто не змінюються при переході від однієї інерціальної системи відліку до іншої;

– принцип сталості швидкості світла: швидкість світла у вакуумі не залежить від руху джерела світла і однакова по всіх напрямках; це означає, що швидкість світла у вакуумі однакова в усіх системах відліку.

Наслідки, що витікають з постулатів:

Просторово-часові перетворення Лоренца, що забезпечують перехід з одної системи відліку до іншої, коли вони рухаються відносно одна до одної зі швидкістю V

$$\begin{cases} x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - (V/c)^2}} \\ y = y', \quad z = z'; \\ t = \frac{t' + x'V/c^2}{\sqrt{1 - (V/c)^2}} \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - (V/c)^2}} \\ y' = y, \quad z' = z; \\ t' = \frac{t - xV/c^2}{\sqrt{1 - (V/c)^2}} \end{cases}.$$

Час як такий є відносним: його плин у різних системах відліку є не однаковий, - дві відалені події, що є одночасні в даній системі відліку, відбуваються в різні моменти часу в системах відліку, котрі рухаються відносно даної.

Систему відліку, в якій точки, де відбуваються дані події є нерухомі, називають **власною системою відліку**, а час, який показує нерухомий в цій системі відліку годинник⁶ (“власний” годинник) називають **власним часом** Δt_0 . Будь-яка інша система

⁶ слово “годинник” означає не якийсь фізичний прилад, а прийнятий принцип вимірювання проміжків часу. Тому розглянутий ефект уповільнення часу є чисто кінематичним і відображає об’єктивну властивість часу як такого, а саме, його **відносність**

відліку, відносно якої точки, де відбуваються події, рухаються зі швидкістю V , називається **лабораторною системою відліку**, а проміжки часу між такими “рухомими” подіями, виміряні годинником лабораторної системи відліку, називають **лабораторним часом** Δt .

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - (V/c)^2}}.$$

Виходячи з цього, можна сказати, що **власний час є найповільнішим**.

Простір як такий є відносним - лінійні (власні) розміри l_0 рухомого об'єкта скорочуються в напрямку руху в лабораторній системі відліку

$$l = l_0 \sqrt{1 - (V/c)^2}.$$

Скорочення довжин у напрямку руху, як і вповільнення часу, є кінематичним ефектом. Менше значення поздовжньої довжини рухомого стержня, порівняно з нерухомим, пояснюється не виникненням у ньому якихось механічних напруг і деформацій, а відносністю самого простору – в різних системах відліку просторові масштаби (розміри одиниці довжини) є не однакові.

Простір і час є органічно взаємопов'язані, - тому слід говорити не про окремі простір і час, а про єдиний “простір-час”. Яскравим проявом цього є те, що попри відносність відстаней та проміжків часу, існує така їхня комбінація, котра є інваріантом перетворень Лоренца, тобто, абсолютною кінематичною величиною, що не залежить від інерціальної системи віліку, в якій розглядається. Ця величина *просторово-часовий інтервал* між двома подіями:

$$s_{12}^2 = c^2 \Delta t_{12}^2 - l_{12}^2 = c^2 (t_1 - t_2)^2 - ((x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2),$$

де (t_1, x_1, y_1, z_1) і (t_2, x_2, y_2, z_2) – просторово-часові координати подій. Отже

$$s_{12}^2 = s_{12}'^2 \quad \text{або} \quad s_{12}^2 = c^2 \Delta t_{12}^2 - l_{12}^2 = \text{inv.}$$

Інтервали поділяють на:

простороподібні ($l_{12} > c\Delta t_{12}$), - при будь-яких можливих відстанях Δl і проміжках часу Δt між подіями в даній К-системі відліку існує інша система відліку К', в якій ці події відбуваються одночасно ($\Delta t'_{12} = 0$) на відстані одна від одної

$$\Delta l'_{12} = \sqrt{l_{12}^2 - c^2 \Delta t^2}$$

При цьому події є незалежними і не впливають одна на одну, тому що такий вплив не може передаватись у просторі швидше, ніж із граничною швидкістю c , і за час Δt подолати відстань Δl .

часоподібні ($c\Delta t_{12} > l_{12}$) – якщо між подіями в К-системі відліку триває час Δt , то існує К'-система відліку, в якій ці події відбуваються в одному місці ($l'_{12}=0$) з інтервалом часу

$$\Delta t'_{12} = \sqrt{c^2 \Delta t^2 - l_{12}^2}$$

світлоподібні ($l_{12} = c\Delta t_{12}$).

Для часоподібних та світлоподібних інтервалів *причинно-наслідковий зв'язок між подіями є можливим*.

Релятивістський закон перетворення швидкостей – спостерігання за рухомою частинкою відбуваються в двох системах відліку, які відносно одна до одної рухаються зі швидкістю V

$$\left\{ \begin{array}{l} v'_x = \frac{v_x - V}{1 - \frac{v_x V}{c^2}}, \\ v'_y = \frac{v_y \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \frac{V v_x}{c^2}}, \\ v'_z = \frac{v_z \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \frac{V v_x}{c^2}}. \end{array} \right. \quad \text{або} \quad \left\{ \begin{array}{l} v_x = \frac{v'_x + V}{1 + \frac{V v'_x}{c^2}}, \\ v_y = \frac{v'_y \sqrt{1 - \beta^2}}{1 + \frac{V v'_x}{c^2}}, \\ v_z = \frac{v'_z \sqrt{1 - \beta^2}}{1 + \frac{V v'_x}{c^2}}. \end{array} \right. \quad \text{де } \beta = V/c.$$

З цього витікає існування *граничної швидкості* - швидкість будь-якого матеріального об'єкта ні за яких умов не може бути більшою, ніж $c = 3 \cdot 10^8$ м/с .

Релятивістський імпульс:

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - (V/c)^2}} \quad \text{або} \quad \vec{p} = m_r \vec{v}, \quad \text{тоді} \quad m_r = \frac{m}{\sqrt{1 - (V/c)^2}} \quad -$$

називають **релятивістською масою** частинки. В такому контексті власну масу частинки m називають **масою спокою**. (величину m_r не можна розглядати як міру інертності рухомого тіла). Отже частинка, що має масу спокою не може рухатися зі швидкістю світла.

Повна релятивістська енергія частинки

$$E = m_r c^2$$

має дві складові: кінетичну енергію K та енергію спокою $E_0 = m c^2$, яка за Ейнштейном є реальною фізичною величиною, котра визначає узагальнену внутрішню енергію частинки (тіла). Остання формула виражає фундаментальний закон природи – **органічний зв'язок енергії з масою**. Його глибинний зміст полягає в тому, що енергія є невід'ємною характеристикою матерії – будь-яка частинка чи тіло має відповідний (і дуже великий) запас енергії завдяки самому факту свого існування.

Кінетична енергія релятивістської частинки

$$K = m c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} - 1 \right).$$

Зв'язок між енергією та імпульсом

$$E^2 - p^2 c^2 = m^2 c^4 \quad \text{отже} \quad E^2 - p^2 c^2 = \text{inv.}$$

Зв'язок між імпульсом та кінетичною енергією

$$p = \frac{1}{c} \sqrt{K (K + 2 m c^2)}.$$

Безмасові частинки – частинки, які не мають власної маси (“маси спокою”) $m = 0$. Такими є фотони – елементарні частинки, що переносять електромагнітне випромінювання, зокрема, світло. Для них енергія та імпульс пов'язані рівнянням

$$E = p c.$$

7.2 Завдання по темі

Задача 7.1 За якої відносної швидкості V двох інерціальних систем відліку можна виявити релятивістське скорочення довжини стрижня, власна довжина l_0 якого 1 м, а мінімальна поділка вимірювального метода складає $\Delta l = 0,1$ мкм ?

Задача 7.2 На космічному кораблі знаходиться годинник, синхронізований до політу з земним. Швидкість корабля 7,9 км/с. На скільки відстане годинник на кораблі від земного годинника за власний час $\tau_0 = 0,5$ роки ?

Умова 7.3. Мюон – елементарна частинка з енергією спокою $E_0 = 105,7 \text{ MeV}$ ⁷ має власний час життя $\tau_0 = 4,5$ мкс. Він утворився на висоті $h = 5$ км від поверхні Землі на якій знаходиться спостерігач. **Визначити:**

1. Швидкість мюона, якщо час його життя збільшився в $n = 1,5$ рази.
2. Долетить, чи ні він до Землі (тобто шлях, що він пролетить за час свого життя) ?
3. Релятивістську масу мюона.
4. Імпульс мюона.
5. Кінетичну енергію.
6. У скільки разів повна енергія мюона більше енергії спокою?

Умова 7.4. В лабораторній системі пі-мезон з моменту народження пролетів відстань $l = 75$ м зі швидкістю $v = 0,995 c$. **Визначити:**

1. Власний час життя пі-мезона.
2. У скільки разів повна енергія більша за енергію спокою?
3. На скільки процентів релятивістська маса m_r пі-мезона більше маси спокою m ?

⁷ 1 MeV = $1,6 \cdot 10^{-19}$ Дж

Тема 8. МОЛЕКУЛЯРНА ФІЗИКА І ТЕРМОДИНАМІКА

8.1 Основні теоретичні положення

Кількість речовини – фізична величина, що характеризує кількість однотипних структурних одиниць, які знаходяться у масі m речовини $\nu = \frac{m}{\mu} = \frac{N}{N_A}$, де μ – молярна маса речовини,

N – кількість атомів чи молекул.

1 моль (ν) речовини містить $N_A = 6,022 \cdot 10^{23}$ моль⁻¹ (число Авогадро) структурних одиниць.

Ідеальний газ – фізична модель газу, розмірами й взаємодією молекул якого можна знехтувати.

Рівняння стану ідеального газу (Менделєєва-Клапейрона):

$$PV = \frac{m}{\mu} RT,$$

де P – тиск газу;

V – об'єм;

$R = 8,31$ Дж/моль·К – універсальна газова стала.

Використовуючи інші параметри це рівняння можна записати у вигляді:

$$P = nkT,$$

де $k = \frac{R}{N_A} = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К – постійна Больцмана;

n – концентрація молекул.

Рівняння стану реального газу (Ван-Дер-Ваальса):

$$\left(P + \left(\frac{m}{\mu} \right)^2 \frac{a}{V^2} \right) \left(V - \frac{m}{\mu} b \right) = \frac{m}{\mu} RT,$$

де a – поправка на взаємодію молекул,

b – поправка, яка враховує «заборонений» для руху об'єм молекул одного моля речовини. Поправки a і b залежать від природи газу і мають назву сталі Ван-дер-Ваальса.

Основне рівняння молекулярно-кінетичної теорії:

$$PV = \frac{2}{3} E,$$

де E – енергія молекул газу.

Теорема Больцмана про рівний розподіл енергії по ступенях вільності: на одну ступінь вільності молекули припадає енергія, що дорівнює $\varepsilon = \frac{1}{2} kT$.

Число ступенів вільності (i) – кількість незалежних координат, які зумовлюють положення молекули у просторі, а також конфігурацію.

Для одноатомних молекул $i = 3$ (поступальні ступені вільності), для двоатомних молекул $i = 5$ (3 поступальні + 2 обертальні), для трьохатомних і багатоатомних – $i = 6$ (3 поступальні + 3 обертальні).

Внутрішня енергія ідеального газу:
$$U = \frac{i}{2} \frac{m}{\mu} RT,$$

є функцією стану або термодинамічним потенціалом системи.

Зміна внутрішньої енергії ідеального газу залежить тільки від зміни температури:
$$\Delta U = \frac{i}{2} \frac{m}{\mu} R \Delta T.$$

Внутрішня молярна енергія реального газу:

$$U_{\mu} = C_v T - \frac{a}{V_{\mu}},$$

де C_v – молярна теплоємність ідеального газу за постійного об'єму.

Робота газу:
$$A = \int_{V_1}^{V_2} P dV.$$

Перший закон термодинаміки: теплота, яка надана системі, витрачається на зміну внутрішньої енергії системи й на виконання системою роботи проти зовнішніх сил:

$$\delta Q = dU + \delta A.$$

Теплоємність – величина, що чисельно дорівнює кількості тепла, яку потрібно надати тілу, щоб підвищити його температуру на 1 К: $C = \frac{dQ}{dT}$.

Питома теплоємність – величина, що чисельно дорівнює кількості тепла, яку потрібно надати одиниці маси тіла, щоб підвищити його температуру на 1 К: $c = \frac{dQ}{m dT}$.

Молярна теплоємність – величина, чисельно рівна кількості тепла, яку потрібно надати 1 молю речовини, щоб підвищити його температуру на 1 К: $C_\mu = \frac{\mu dQ}{m dT} = \mu c$.

Адіабатний процес – процес, що протікає без теплообміну із зовнішнім середовищем: $\delta Q = 0$, тоді $\delta A = -dU$, тобто робота газу виконується за рахунок внутрішньої енергії.

Рівняння адіабатного процесу (рівняння Пуассона)

$$PV^\gamma = \text{const}; TV^{\gamma-1} = \text{const}, \text{ де } \gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{i+2}{i} - \text{показник}$$

адіабати.

Таблиця 8.1 Рівняння ізопроцесів

Процес	Рівняння	I закон	Робота газу	Молярна тепло-ємність
Ізотермічний $T = \text{const}$	$P_2 V_2 = P_1 V_1$	$Q = A$	$\frac{m}{\mu} RT \ln \frac{V_2}{V_1}$	∞
Ізобарний $P = \text{const}$	$\frac{V_2}{T_2} = \frac{V_1}{T_1}$	$Q = \Delta U + A$	$P(V_2 - V_1)$	$\frac{i+2}{2} R$
Ізохорний $V = \text{const}$	$\frac{P_2}{T_2} = \frac{P_1}{T_1}$	$Q = \Delta U$	0	$\frac{i}{2} R$
Адіабатний	$P_1 V_1^\gamma = P_2 V_2^\gamma$	$Q = 0$	$A = -\Delta U$	0

Ентропія S – функція стану термодинамічної системи, що визначає міру необоротного розсіювання енергії. У статистичній

фізиці ентропія характеризує ймовірність реалізації довільного макроскопічного стану. Ентропія системи пов'язана з термодинамічною ймовірністю стану Ω рівнянням Больцмана:

$$S = k \ln \Omega + \text{const}.$$

Зміна ентропії $dS = \left(\frac{\delta Q}{T} \right)_{\text{обр}}$ або $\Delta S = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T}.$

Другий закон термодинаміки. Найчастіше зустрічаються формулювання:

– неможна здійснити такий процес, єдиним результатом якого є перетворення всієї теплоти, отриманої від нагрівника, в еквівалентну їй роботу;

– неможна здійснити такий процес, єдиним результатом якого є передача енергії у формі теплоти від холодного тіла до нагрітого;

– ентропія замкненої системи при будь-яких процесах, що відбуваються в ній, не може зменшуватися: $dS \geq 0$;

– термодинамічна ймовірність стану замкненої системи при всіх процесах, що відбуваються в ній, не може зменшуватися: $\Delta \Omega = \Omega_2 - \Omega_1 \geq 0$.

Коефіцієнт корисної дії (ККД) теплового двигуна

$$\eta = \frac{A}{Q_H} = \frac{Q_H - |Q_X|}{Q_H},$$

де A – робота, яка виконана в циклі;

Q_H – кількість теплоти, отримана від нагрівника;

Q_X – кількість теплоти, яка віддана холодильнику.

Цикл Карно – замкнений цикл, що складається з двох ізотерм і двох адіабат. ККД циклу Карно $\eta = \frac{T_H - T_X}{T_H}$, де T_H –

температура нагрівника, T_X – температура холодильника.

Теорема Карно: 1. Коефіцієнт корисної дії будь-якої оборотної теплової машини, не залежить від природи робочого тіла й конструкції двигуна, а є функцією тільки температури нагрівника й холодильника: $\eta = 1 - f(T_H, T_X)$.

2. Коефіцієнт корисної дії будь-якої теплової машини, що працює за необоротним циклом, менше за коефіцієнт корисної дії машини з оборотним циклом Карно, за умови рівності температур їх нагрівників і холодильників: $\eta_{\text{необор.}} < \eta_{\text{оборотн.}}$.

Коефіцієнт корисної дії або холодильний коефіцієнт холодильної машини можна записати як відношення кількості теплоти Q_2 , що забрана від охолоджуваного тіла, до витраченої для цього механічної роботи A :

$$\eta_x = \frac{Q_2}{A} = \frac{Q_2}{Q_1 - Q_2},$$

де Q_1 – кількість теплоти, яка надана тепловому резервуару.

Третій закон термодинаміки (теорема Нернста) – при абсолютному нулі температури ентропія дорівнює нулю.

8.2 Завдання по темі

Умова. У посудині об'ємом $V_1 = 6$ л при тиску $P_1 = 0,4$ МПа перебуває один моль двохатомного газу, який потім виконує замкнений цикл, що складається з послідовних процесів (згідно з таблицею варіантів).

Варіант	1-2	2-3	3-4	4-1
1	Ізобара $V_2 = 3V_1$	Ізотерма $V_3 = 1,5V_2$	Ізобара до $T_3 = T_1$	Ізотерма
2	Ізобара $V_2 = 3V_1$	Ізотерма $V_3 = 1,5V_2$	Ізохора до $T_3 = T_1$	Ізотерма
3	Ізобара $V_2 = 3V_1$	Адіабата $V_3 = 1,5V_2$	Ізобара до $V_3 = V_1$	Ізохора
4 (приклад)	Ізотерма $V_2 = 4V_1$	Ізохора $P_3 = 3P_2$	Ізотерма до $P_4 = P_1$	Ізобара
5	Ізобара $T_2 = 2T_1$	Ізохора до $T_3 = T_1$	Ізотерма	—
6	Ізохора $P_2 = 2P_1$	Ізотерма $P_3 = P_1$	Ізобара	—
7	Адіабата $V_2 = 1,5V_1$	Ізобара до $T_3 = T_1$	Ізотерма	—

Знайти:

1. Параметри точок 2, 3 і 4. Зобразити цикл у координатах: P, V ; V, T та P, T .
2. Кількість теплоти Q , яка поглинена газом у циклі.
3. Кількість теплоти Q , яка виділена газом у циклі.
4. Роботу, що виконана газом у циклі.
5. ККД прямого циклу або холодильний коефіцієнт у випадку зворотного циклу.
6. Зміну внутрішньої енергії ΔU і зміну ентропії ΔS при переході а) 1-2; б) 2-3; в) 3-4; г) 1-3; д) 2-4; е) 4-1; ж) 3-1.

Приклад розв'язку варіанта 4.

Температура початкового стану згідно з рівнянням Менделєєва-Клапейрона:

$$T_1 = \frac{P_1 V_1}{\nu R} = \frac{0,4 \cdot 10^6 \cdot 6 \cdot 10^{-3}}{1 \cdot 8,31} = 290 \text{ (К)}.$$

Рівняння ізотерічного процесу 1-2:

$$P_1 V_1 = P_2 V_2, \text{ звідки } P_2 = \frac{P_1 V_1}{V_2} = \frac{P_1 V_1}{4 V_1} = \frac{0,4}{4} = 0,1 \text{ (МПа)}.$$

Рівняння ізохорного процесу 2-3:

$$\frac{P_2}{P_3} = \frac{T_2}{T_3}, \text{ звідки } T_3 = \frac{P_3 T_2}{P_2} = \frac{3 P_2 T_2}{P_2} = 3 T_2 = 3 T_1 = 870 \text{ (К)}.$$

Рівняння ізотерічного процесу 3-4:

$$P_3 V_3 = P_4 V_4, \text{ звідки } V_4 = \frac{P_3 V_3}{P_4} = \frac{0,3 \cdot 24}{0,4} = 18 \text{ (л)}.$$

Для спрощення подальших розрахунків складемо таблицю параметрів характерних точок:

точка	$P, 10^6 \text{ Па}$	$V, 10^{-3} \text{ м}^3$	$T, \text{ К}$
1	0,4	6	290
2	0,1	24	290
3	0,3	24	870
4	0,4	18	870

Наносимо ці точки на координатну площину і будуємо графіки процесів.

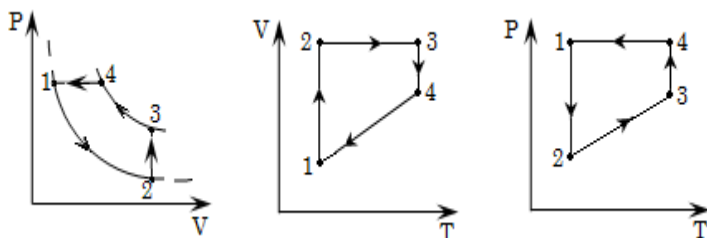


Рисунок 8.1 – Графіки процесу у різних термодинамічних параметрах

Кількість теплоти, поглинена або виділена в процесах:

1-2 ізотермічний:

$$Q_{1-2} = \nu RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} = 1,8,31 \cdot 290 \cdot \ln 4 = 3340 \text{ (Дж)} ;$$

2-3 ізохорний:

$$Q_{1-3} = \frac{i}{2} \nu R (T_2 - T_1) = \frac{5}{2} 1,8,31 \cdot (870 - 290) = 12050 \text{ (Дж)} ;$$

3-4 ізотермічний:

$$Q_{3-4} = \nu RT_2 \ln \frac{V_4}{V_3} = 1,8,31 \cdot 870 \cdot \ln \frac{18}{24} = -2080 \text{ (Дж)} ;$$

4-1 ізобарний:

$$\begin{aligned} Q_{1-3} &= \frac{i}{2} \nu R (T_1 - T_2) + P_1 (V_1 - V_4) = \\ &= 2,5 \cdot 1,8,31 \cdot (290 - 870) + 0,4 \cdot 10^6 \cdot (6 - 18) \cdot 10^{-3} = \\ &= -16849,5 \text{ (Дж)} \end{aligned}$$

У процесах 1-2 і 2-3 теплота додатна, отже, система відбирає тепло від нагрівника. У процесах 3-4 і 4-1 – від’ємна, отже, система віддає теплоту холодильнику. Відповідаючи на питання 2, про поглинену теплоту:

$$Q_{\text{погл}} = Q_{1-2} + Q_{2-3} = 3340 + 12050 = 15390 \text{ (Дж)} .$$

Відповідаючи на питання 3 про віддану теплоту:

$$Q_{\text{отд}} = Q_{3-4} + Q_{4-1} = -2080 - 16849,5 = -18929,5 \text{ (Дж)} .$$

4. Так як цикл замкнений, то зміна внутрішньої енергії $\Delta U = 0$, а робота в циклі дорівнює:

$$A = Q_{\text{погл}} + Q_{\text{отд}} = 15390 - 18929,5 = -3539,5 \text{ (Дж)}.$$

5. Робота в циклі від'ємна, а це означає, що такий цикл зворотний (на це вказує й напрямок процесу в параметрах P, V). У цьому випадку цикл відповідає холодильній машині, для якої визначається холодильний коефіцієнт:

$$\eta_x = \frac{Q_{\text{отд}}}{A} = \frac{-18929,5}{-3539,5} = 5,35. \text{ (На відміну від ККД теплового}$$

двигуна, ККД холодильної машини більший за 1).

6. Зміну внутрішньої енергії в процесах знаходимо за визначенням: $\Delta U = \frac{i}{2} \nu R \Delta T$.

Зміна ентропії ідеального газу:

$$\begin{aligned} \Delta S &= \int_a^b \frac{dQ}{T} = \int_a^b \frac{\frac{i}{2} \nu R dT + PdV}{T} = \int_a^b \frac{i}{2} \nu R \frac{dT}{T} + \int_a^b \nu R \frac{dV}{V} = \\ &= \frac{i}{2} \nu R \ln \frac{T_b}{T_a} + \nu R \ln \frac{V_b}{V_a}. \end{aligned}$$

Відповідно до цієї формули зміна ентропії в процесі 1-2

$$\Delta S_{1-2} = \nu R \ln \frac{V_2}{V_1} = 1,8,31 \cdot \ln 4 = 11,52 \text{ (Дж/К)}.$$

У процесі 2-3:

$$\Delta S_{2-3} = \frac{i}{2} \nu R \ln \frac{T_2}{T_1} = 1,8,31 \cdot \ln 3 = 22,825 \text{ (Дж/К)}.$$

Так як ентропія є термодинамічним потенціалом, то для процесу 1-3:

$$\Delta S_{1-3} = \Delta S_{1-2} + \Delta S_{2-3} = 11,52 + 22,825 = 34,345 \text{ (Дж/К)}.$$

Тема 9. ОСНОВИ СТАТИСТИЧНОЇ ФІЗИКИ

9.1 Основні теоретичні положення

Для опису властивостей макроскопічних тіл і процесів з їхньою участю, що спостерігаються на практиці, не потрібно знати мікроскопічний стан системи. Важливо знати не поведінку окремих молекул, а усереднений результат, до якого призводить їхній сукупний рух. Цей усереднений результат можна передбачити за допомогою законів статистичної фізики.

Кожному мікроскопічному стану відповідає певний макроскопічний стан. Однак, тому самому макроскопічному стану може відповідати величезна кількість мікроскопічних станів. Наприклад, ні тиск, ні температура газу в стані рівноваги не змінюються, але молекули газу неперервно рухаються, змінюють координати й імпульси, а отже мікроскопічні стани системи весь час змінюються. Число мікроскопічних станів (або число способів) реалізації даного макростану має назву **статистична вага Ω** .

Ймовірність ΔW того, що імпульс молекули лежить в інтервалі від p до $p + \Delta p$ дорівнює відношенню числа молекул Δn з даним значенням імпульсу до повного числа молекул n :
$$\Delta W = \frac{\Delta n}{n} = f(p) \Delta p.$$
 Функція $f(p)$ називається **функцією розподілу** молекул за імпульсами і являє собою густину ймовірності.

Найбільш достовірним розподілом частинок ідеального газу за імпульсами p є **розподіл Максвелла**:

$$f(p) = \frac{1}{(2\pi m k T)^{3/2}} e^{-p^2/2mkT}.$$

Розподіл Максвелла за швидкостями v частинок:

$$f(v) = \left(\frac{m}{2\pi k T} \right)^{3/2} e^{-\frac{m v^2}{2kT}},$$

тут k – постійна Больцмана,

m – маса частинок.

Густина ймовірності: $F(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2$ –

визначає ймовірність того, що значення швидкості частинки перебуває в інтервалі від v до $v + dv$. Тобто, $F(v) = \frac{dN}{N dv}$, де

dN – число частинок, значення швидкості яких знаходиться в інтервалі від v до $v + dv$, N – повне число частинок.

Для розв'язку деяких завдань зручно користуватися відносною швидкістю $u = \frac{v}{v_{\text{вер}}}$, тоді кількість частинок dn в інтервалі швидкостей du записується рівнянням:

$$dn = \frac{4n_0}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2} u^2 du.$$

Призначення функції розподілу – визначати середні величини колективу частинок:

$$\text{Середня швидкість } \langle v \rangle = \int_0^{\infty} v F(v) dv = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi \mu}}.$$

Середньоквадратична швидкість:

$$\langle v^2 \rangle = \int_0^{\infty} v^2 F(v) dv; \quad v_{\text{ср кв}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}.$$

$$\text{Найбільш ймовірна швидкість } v_i = \sqrt{\frac{2kT}{m}} = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}}.$$

Розподіл Больцмана (розподіл частинок у силовому полі)

$n = n_0 e^{-\frac{mgh}{kT}}$, де mgh – потенційна енергія частинки у гравітаційному полі. Даний розподіл застосовується тільки для ізотермічної атмосфери, тобто для $T = \text{const}$.

Розподіл Максвелла-Больцмана:

$$f(v) = n_0 \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT} + \frac{U}{kT}},$$

цікавий тим, що вказує на незалежність розподілу частинок за швидкостями від положення частинок у силовому полі, у якому частинка має потенційну енергію U .

9.2 Завдання по темі

Умова. Температура повітря 27°C .

Знайти:

1. Найбільш ймовірну швидкість молекул: а) кисню; б) азоту; в) пари води.
2. Середню арифметичну швидкість молекул.
3. Середньоквадратичну швидкість молекул.
4. У скільки разів швидкість молекул азоту відрізняється від швидкості молекул кисню? Від швидкості молекул води?
5. Яка частина молекул має швидкість на 1% більшу, ніж найбільш ймовірна?
6. Яка частина молекул має швидкості в інтервалі від $1,5v_i$ до $1,51v_i$.
7. Яка частина молекул має швидкість
 - а) більшу за найбільш ймовірну?
 - б) більшу за середньоквадратичну?
 - в) в інтервалі між найбільш ймовірною швидкістю та середньоарифметичною?
8. У скільки разів відрізняється концентрація молекул на рівні моря й на горі, висотою 5 км.

Рекомендації для розв'язку завдань

Питання у п.1 – 4, 8 розв'язуються строго за визначеннями.

У п.5 і 6 інтервал швидкостей Δv настільки малий, що в ньому функція розподілу є постійною величиною. За таких умов розв'язок зводиться до визначення відносної швидкості u і до розрахунків шуканої відповіді за формулою:

$$\Delta n = \frac{4n_0}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2} u^2 \Delta u.$$

Приклад розв'язку питання 7

Визначити яка частина молекул азоту (молярна маса $\mu = 0,028$ кг/моль) має швидкість меншу за найбільш ймовірну.

Найбільш ймовірна швидкість молекул азоту при температурі $T = 300$ К:

$$v_i = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 8,31 \cdot 300}{0,028}} = 422 \text{ м/с.}$$

За визначенням, саме функція розподілу дає відповідь на питання завдання: $\frac{dN}{N} = F(v) dv$, але, так як інтервал

швидкостей досить великий, то $\frac{\Delta N}{N} = \int_{v_1}^{v_2} F(v) dv$.

У функції розподілу Максвелла зробимо заміну: $\frac{m}{k} = \frac{\mu}{R}$, (так як маса молекули $m = \frac{\mu}{N_A}$, а постійна Больцмана $k = \frac{R}{N_A}$) і отримаємо наступне рівняння:

$$\frac{\Delta N}{N} = \int_{v_1}^{v_2} 4\pi \left(\frac{\mu}{2\pi RT} \right)^{3/2} e^{-\frac{\mu v^2}{2RT}} v^2 dv = 4\pi \left(\frac{\mu}{2\pi RT} \right)^{3/2} \int_{v_1}^{v_2} e^{-\frac{\mu v^2}{2RT}} v^2 dv$$

Подальші дії зводяться до інтегрування виразу і математичних розрахунків. Однак, слід визнати, що це завдання не є простим, тому що його розв'язок залежить від, так званої, функції помилок **erf** (функція Лапласа або інтеграл ймовірності)⁸. Тому рекомендуємо скористатися будь-яким доступним Інтернет-Додатком, наприклад, Інтеграл-Онлайн.

⁸ Неелементарна функція, яку використовують в теорії ймовірностей, статистики та теорії диференціальних рівнянь в приватних похідних

$$\text{erf } x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

Рекомендація: зробіть заміну змінної $x = \sqrt{\frac{\mu}{2RT}}v$, тоді розв'язок

ще раз спроститься:
$$\frac{\Delta N}{N} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-x^2} x^2 dx.$$

Межі інтегрування визначите за умовою:

$$x_1=0 \text{ і } x_2 = \sqrt{\frac{\mu}{2RT}} v_2 = \sqrt{\frac{0,028}{2 \cdot 8,31 \cdot 300}} \cdot 422 = 1,00.$$

Далі введіть функцію і отримайте результат:

$$\int_0^1 e^{-x^2} x^2 dx = \frac{e\sqrt{\pi}\text{erf}(1) - 2}{4e} \approx 0,189472$$

Зробіть остаточний розрахунок:

$$\frac{\Delta N}{N} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-x^2} x^2 dx = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \cdot 0,189472 = 0,4277$$

На рис. 8.1 показано криву, що описує розподіл Максвелла і графічне представлення отриманого результату (темна площа під кривою функції при $0 < v < v_i$). Зауважимо, що площа під усією кривою буде рівна 1.

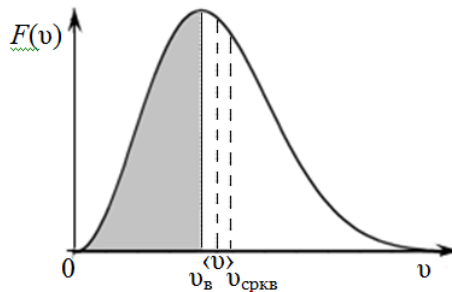


Рисунок 9.1

Тема 10. ЯВИЩА ПЕРЕНОСУ В ГАЗАХ

10.1 Основні теоретичні положення

Середня довжина вільного пробігу – відстань, яку проходить молекула між двома послідовними зіткненнями:

$$\langle \lambda \rangle = \frac{1}{\sqrt{2} \pi d^2 n}. \text{ Тут } d - \text{ефективний діаметр молекули}$$

(мінімальна відстань, на яку можуть наблизитися дві молекули),
 n – концентрація молекул.

Середнє число зіткнень молекули за одиницю часу:

$$\langle z \rangle = \frac{\langle v \rangle}{\langle \lambda \rangle}, \text{ де } \langle v \rangle - \text{середньоарифметична швидкість руху}$$

молекул.

Явища переносу – процеси, пов'язані з відновленням рівноваги в термодинамічній системі. Ці процеси пов'язані з неоднорідністю (градієнтом) одного з параметрів:

- **густини** (концентрація) – дифузія або масоперенесення;
- **температури** – теплопровідність;

- **швидкості спрямованого руху** – в'язкість (перенесення імпульсу частинок у напрямку перпендикулярному до напрямку основного потоку).

Процеси характеризуються параметром, який називається **потік**: кількість відповідної величини, що проходить за одиницю часу крізь довільну уявну поверхню площею ΔS у напрямку нормалі до поверхні.

Питомий потік (густина потоку) – потік крізь одиничну поверхню.

Рівняння дифузії (Фіка): кількість маси, що проходить крізь поверхню ΔS за час Δt :

$$\Delta m = -D \frac{d\rho}{dx} \Delta S \Delta t,$$

де коефіцієнт дифузії $D = \frac{1}{3} \langle v \rangle \langle \lambda \rangle$, ρ – густина газу.

Рівняння теплопровідності (Фур'є): кількість теплоти, що виділяє нагріте тіло крізь поверхню ΔS за час Δt :

$$\Delta Q = -K \frac{dT}{dx} \Delta S \Delta t,$$

де коефіцієнт теплопровідності $K = \frac{1}{3} \langle v \rangle \langle \lambda \rangle \rho c_v$,

c_v – питома теплоємність газу при постійному об'ємі.

Сила тертя між шарами газу (ідеальної рідини), що рухаються напрямлено зі швидкістю u (закон Ньютона)

$$F_{mp} = \eta \left| \frac{du}{dz} \right| \Delta S,$$

де коефіцієнт динамічної в'язкості $\eta = \frac{1}{3} \langle v \rangle \langle \lambda \rangle \rho$, z – напрямок, уздовж якого відбувається зміна швидкості потоків.

10.2 Завдання по темі

Умова. Повітря перебуває за нормальних умов у віконному склопакеті (площа вікна 2 м^2 , відстань між стеклами $l = 10 \text{ см}$). Для молекул а) кисню; б) азоту; в) води:

Знайти:

1. Середню арифметичну швидкість молекул.
2. Середню довжину вільного пробігу молекул.
3. Коефіцієнт дифузії.
4. Коефіцієнт в'язкості.
5. Коефіцієнт теплопровідності.
6. Знайти залежність коефіцієнтів D , K , η від температури й тиску.
7. Яка кількість теплоти буде переноситися даним газом крізь поверхню вікна за 1 годину, якщо у приміщенні температура 22°C , а на вулиці -13°C . Процес є стаціонарним.

Завдання даної теми розв'язують строго за визначеннями і алгоритмів не потребують.

Тема 11. ЕЛЕКТРОСТАТИКА

11.1 Основні теоретичні положення

Електростатичне поле є особливим видом матерії, що має енергію, та поширюється у просторі зі швидкістю $c = 3 \cdot 10^8$ м/с (швидкість світла). Джерелом електростатичного поля є заряди, найменшими (елементарними) є електрони, заряд одного електрона $e = -1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл. Антиподом електрона є протон, заряд якого $q = +1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл. У цілому тіла електронейтральні, тому що в атомі кількість електронів дорівнює кількості протонів.

Вектор напруженості електричного поля $\vec{E}$ – силова характеристика електростатичного поля. Вектор $\vec{E}$ чисельно дорівнює силі, з якою поле діє на одиничний позитивний заряд q_0 (пробний заряд), розташований у даній точці поля. Напрямок $\vec{E}$ визначається напрямом руху пробного заряду (від позитивного заряду до негативного):

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}.$$

Графічно поле представляють у вигляді ліній напруженості – ліній, дотичні до яких у кожній точці збігаються з напрямком дії сили на пробний заряд.

Принцип суперпозиції полів: напруженість поля системи зарядів дорівнює векторній сумі напруженостей полів, які створює кожний із зарядів системи окремо: $\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i$.

Поле точкового заряду центрально симетричне. Воно починається на позитивних зарядах і закінчується на негативних. Напруженість поля на відстані r від заряду q :

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{r},$$

де ϵ – діелектрична проникність середовища,

$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м – електрична стала.

Закон Кулона: сила взаємодії точкових зарядів q_1 і q_2 , що перебувають на відстані r один від одного:

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}.$$

Поле нескінченної⁹ однорідно зарядженої площини:

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon\epsilon_0}, \text{ де } \sigma - \text{поверхнева густина заряду } \sigma = \frac{dq}{dS}.$$

Лінії напруженості поля паралельні між собою та перпендикулярні до поверхні, таким чином поле є однорідним.

Поле зарядженої нитки: $\vec{E} = \vec{E}_n + \vec{E}_\tau$ (см. рис. 10.1)

$$\text{де } E_\tau = \frac{\tau}{4\pi\epsilon\epsilon_0 a} (\cos \varphi_2 - \cos \varphi_1),$$

$$E_n = -\frac{\tau}{4\pi\epsilon\epsilon_0 a} (\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1),$$

$$\tau - \text{лінійна густина заряду } \tau = \frac{dq}{dl},$$

a – найкоротша відстань від точки до нитки.

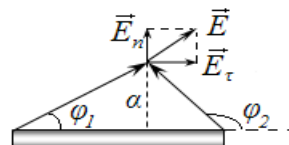


Рисунок 11.1

Поле нескінченної¹⁰ однорідно зарядженої нитки:

$$E = \frac{\tau}{2\pi\epsilon\epsilon_0 r}, \text{ лінії напруженості перпендикулярні до нитки.}$$

Поле рівномірно зарядженої кулі радіуса R :

$$E = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \Big|_{r < R} \text{ та } E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \Big|_{r \geq R},$$

де $\rho = \frac{dq}{dV}$ – об'ємна густина заряду всередині кулі;

q – повний заряд кулі.

⁹ Нескінченною можна вважати будь-яку площину, якщо точка, в якій визначається напруженість поля, знаходиться досить далеко від всіх країв площини

¹⁰ Нескінченною можна вважати нитку, якщо точка, в якій визначається напруженість поля, знаходиться на дуже малій відстані від нитки у порівнянні з відстанню до будь-якого з її кінців

Електричне зміщення: $\vec{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E}$, векторна характеристика електричного поля, що не залежить від властивостей середовища.

Потік вектора напруженості: скалярна величина $d\Phi_E = (\vec{E}, \vec{n}) dS$, де $\vec{n}$ – вектор нормалі до поверхні dS .
 $d\Phi_E = E dS \cos \alpha$.

Теорема Остроградського-Гауса: потік вектора напруженості електростатичного поля у вакуумі, крізь довільну замкнену поверхню, дорівнює алгебраїчній сумі всіх зарядів, що охоплені цією поверхнею, поділену на ε_0 :

$$\oint (\vec{E}, \vec{n}) dS = \frac{\sum q_i}{\varepsilon_0}.$$

Циркуляція вектора напруженості електростатичного поля $\oint (\vec{E}, d\vec{l}) = 0$. Поле є консервативним (потенційним) і лінії електростатичного поля не можуть бути замкненими. У цьому випадку робота електростатичного поля відбувається за рахунок зменшення потенціальної енергії W взаємодіючих зарядів: $dA = -dW$.

Враховуючи визначення роботи $dA = (\vec{F}, d\vec{l})$, знайдемо роботу при переміщенні пробного заряду q_0 з точки 1 в точку 2 у полі заряду q :

$$A = q_0 \int_1^2 \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{dr}{r^2} = \frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right).$$

Порівнюючи з попереднім твердженням, одержуємо потенціальну енергію взаємодії точкових зарядів:

$$W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r} + C,$$

де константа інтегрування $C = 0$, так як повинна виконуватися умова, що на нескінченній відстані між зарядами енергія їх взаємодії дорівнює нулю $W(r = \infty) = 0$.

Потенціал електростатичного поля: $\varphi = \frac{W}{q_0}$, де W –

потенціальна енергія пробного заряду q_0 в електростатичному полі. Потенціал – величина адитивна, це означає, що за наявності декількох джерел поля, потенціал точки поля дорівнює сумі всіх складових $\varphi = \sum_i \varphi_i$.

Робота електростатичного поля: $dA = -q d\varphi$.

Зв'язок між потенціалом і напруженістю електростатичного поля $\vec{E} = -\text{grad } \varphi$, де $\text{grad } \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{k}$. Знак «–» вказує на те, що вектор напруженості спрямований у бік зменшення потенціалу.

Різниця потенціалів поля точкового заряду:

$$\Delta \varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right).$$

Різниця потенціалів однорідного поля площини, силові лінії якого спрямовані уздовж ОХ:

$$\Delta \varphi = -E \Delta x = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (x_1 - x_2).$$

Різниця потенціалів між точками поля, розташованими на відстані r_1 і r_2 від нескінченної довгої нитки:

11.2 Завдання по темі

Умова. На рисунках 11.2 – 11.5 показаний розподіл зарядів у просторі. Точкові заряди: $q_1 = +8$ нКл, $q_2 = -2$ нКл, $q_3 = -7$ нКл; нескінченна велика площина з поверхневою густиною заряду $\sigma = 0,5$ мкКл/м²; нескінченна заряджена нитка з лінійною густиною заряду $\tau = 30$ нКл/м. Масштаб сітки 1 см.

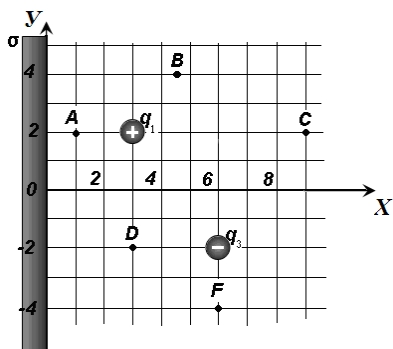


Рисунок 11.2

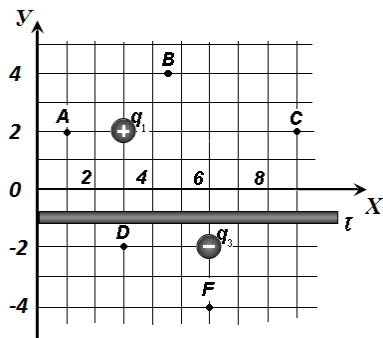


Рисунок 11.3

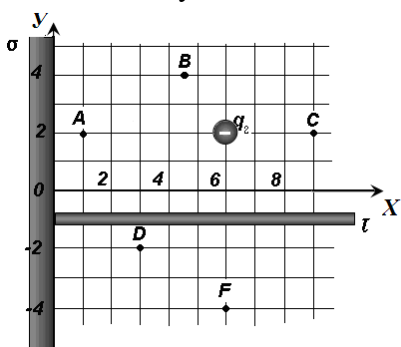


Рисунок 11.4

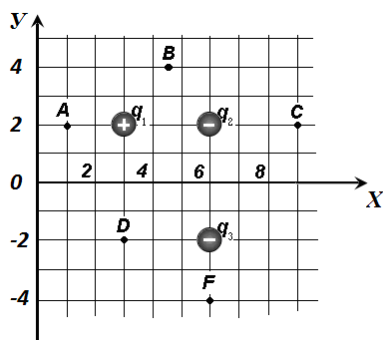


Рисунок 11.5

У точці 1 (A, B, C, D, F) площини **знайти**:

1. Напруженість поля $\vec{E}$ і його числове значення E .
2. Силу $\vec{F}$, що діє на заряд $q = 3\text{нКл}$, розташований у даній точці.
3. Потік напруженості електричного поля крізь площадку $S = 1\text{мм}^2$, центр якої лежить у точці 1 (нормаль площинки спрямована уздовж OX).
4. Потік напруженості електричного поля крізь суцільну сферичну поверхню радіуса 3,0 см (5,0 см), центр якої знаходиться у точці 1 (A, B, C, D, F).
5. Різницю потенціалів поля $\Delta\phi$ між точками 1 і 2 (B, C, D, F, A).

6. Роботу при переміщенні заряду $q = 3 \text{ нКл}$ з точки 1 у точку 2.

7. Яку швидкість набуває заряд $q = 3 \text{ нКл}$ при переміщенні з точки 1 у точку 2, за умови, що в точці 1 він перебував у стані спокою, а його маса $m = 5 \text{ мг}$.

Приклад розв'язування завдання

Запишемо умову згідно з рис. 11.6. За точку 1 обираємо точку D, за точку 2 – точку C. Визначаємо, згідно з рисунком, відстані від зарядів до обраних точок: відстань від заряду q_1 до т. D $r_{11} = 4 \text{ см}$, до т. C $r_{21} = 6 \text{ см}$; відстань від заряду q_3 до т. D $r_{13} = 3 \text{ см}$, до т. C, $r_{23} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \text{ см}$. Ці величини будуть використовуватися при подальших розрахунках.

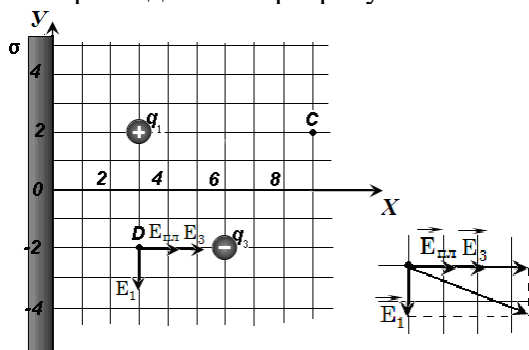


Рисунок 11.6

1. За умовою, джерелами електричного поля є: площина, напруженість поля якої визначається за формулою $E_{\text{пл}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$ та два точкові заряди, напруженість поля яких визначається за формулою $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$.

За принципом суперпозиції напруженість результуючого поля $\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i$.

На рисунку покажемо напрямок векторів $\vec{E}_{\text{пл}}$ й $\vec{E}_3$ у т. D. Бачимо, що вони спрямовані уздовж ОХ, отже їхня сума:

$$E_{\text{пл},3} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_3}{r_{3D}^2} = \frac{0,5 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}} + 9 \cdot 10^9 \frac{7 \cdot 10^{-9}}{(0,03)^2} = 98,25 \cdot 10^3 (\text{В/м})$$

$\vec{E}_1$ спрямована уздовж осі ОУ, але у протилежний бік осі:

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1}{r_{1D}^2} = 9 \cdot 10^9 \frac{8 \cdot 10^{-9}}{(0,04)^2} = 45 \cdot 10^3 (\text{В/м}).$$

У підсумку $\vec{E} = 98,25\vec{i} - 45\vec{j}$, кВ/м.

$$\text{Модуль } E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \sqrt{98,25^2 + 45^2} = 108 (\text{кВ/м}).$$

2. Сила, що діє на заряд з боку електричного поля напруженістю $\vec{E}$: $\vec{F} = q\vec{E}$. Підставимо числові значення $\vec{F} = 3 \cdot 10^{-9}(98,25\vec{i} - 45\vec{j}) = (295\vec{i} - 135\vec{j})$ (мН).

$$\text{Модуль сили } F = \sqrt{295^2 + 135^2} = 324,5 (\text{мкН}).$$

3. Потік напруженості $d\Phi_E = E dS \cos \alpha$. За умовою площа S є малою, а отже вона плоска, тоді кут α між нормаллю до неї і $\vec{E}$ не змінюється. Потік $\Phi_E = ES \cos \alpha$. У даному завданні $E \cos \alpha = E_x$, де $E_x = E_{\text{пл},3}$. Отже $\Phi_E = E_{\text{пл},3} S = 98,25 \cdot 10^3 \cdot 1 \cdot 10^{-6} \approx 0,1 (\text{В} \cdot \text{м})$.

4. Нехай центр сфери радіуса 5 см перебуває в т. А. Зобразимо сферу на нашому рисунку 11.7. З рисунка видно, що усередину сфери потрапив точковий заряд q_1 і круговий елемент зарядженої поверхні. Заряд цього елемента поверхні:

$$q_{\text{пов}} = \sigma \cdot S = \sigma \cdot \pi R_{\text{сегмента}}^2, \text{ де}$$

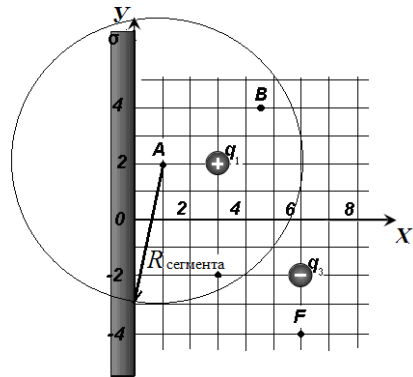


Рисунок 11.7

$$R_{\text{сегмента}} = \sqrt{R^2 - (OA)^2} = \sqrt{5^2 - 1^2} = 4,33 \text{ (см)}.$$

Тоді, за теоремою Остроградського-Гаусса повний потік крізь дану поверхню буде:

$$\Phi_E = \frac{q_1 + q_{\text{пов}}}{\varepsilon_0} = \frac{8 \cdot 10^{-9} + 0,5 \cdot 10^{-6} \cdot 3,14 \cdot 0,0433^2}{8,85 \cdot 10^{-12}} = 1,232 \text{ (В} \cdot \text{м)}.$$

5. Потенціал – величина скалярна, тому, для визначення різниці потенціалів між точками D і C поля системи зарядів, можна скористатися властивістю адитивності:

$\Delta\varphi = \Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_3 + \Delta\varphi_{\text{пл}}$, де $\Delta\varphi_1$ й $\Delta\varphi_3$ – різниця потенціалів, яка створена зарядами q_1 і q_3 , відповідно; $\Delta\varphi_{\text{пл}}$ – різниця потенціалів поля площини.

$$\text{Для точкових зарядів: } \Delta\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right).$$

Отже:

$$\Delta\varphi_1 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{r_{1D}} - \frac{1}{r_{1C}} \right) = \frac{8 \cdot 10^{-9}}{4 \cdot 3,14 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}} \left(\frac{1}{0,06} - \frac{1}{0,04} \right) = -600 \text{ (В)},$$

$$\Delta\varphi_3 = \frac{q_3}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{r_{3D}} - \frac{1}{r_{3C}} \right) = \frac{-7 \cdot 10^{-9}}{4 \cdot 3,14 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}} \left(\frac{1}{0,05} - \frac{1}{0,03} \right) = 840 \text{ (В)}.$$

$$\text{Для поля площини } \Delta\varphi = -E\Delta x = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} (x_1 - x_2)$$

$$\Delta\varphi_{\text{пл}} = -E\Delta x = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} (x_D - x_C) = \frac{0,5 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}} (0,03 - 0,09) = -1700 \text{ (В)}.$$

Знаючи значення всіх доданків знаходимо

$$\Delta\varphi = \Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_3 + \Delta\varphi_{\text{пл}} = -600 + 840 - 1700 = -1460 \text{ (В)}.$$

6. Робота електростатичного поля при переміщенні заряду q між точками D і C $A = -q\Delta\varphi$. Використовуючи значення різниці потенціалів, знайдене в попередньому пункті завдання, проведемо розрахунок:

$$A = -3 \cdot 10^{-9} (-1460) = 4,38 \cdot 10^{-6} \text{ (Дж)}.$$

7. Електростатичне поле консервативне, це означає, що за законом збереження енергії його робота витрачається на зміну

кінетичної енергії заряду. Враховуючи, що в т. D заряд був нерухомим, отримуємо остаточну відповідь:

$$\frac{m v^2}{2} = A, \text{ звідки } v = \sqrt{\frac{2A}{m}}.$$
$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot 4,38 \cdot 10^{-6}}{5 \cdot 10^{-6}}} = 1,39 \text{ (м/с)}.$$

Тема 12. ПРОВІДНИКИ В ЕЛЕКТРОСТАТИЧНОМУ ПОЛІ

12.1 Основні теоретичні положення

Провідниками електричного струму називають речовини, що мають вільні електричні заряди, які здатні, під дією електричного поля, рухатися у певному напрямку і тим самим створювати електричний струм. Напруженість електричного поля E усередині провідника за будь-яких умов (заряджений або незаряджений провідник у зовнішньому полі) дорівнює нулю $E = 0$.

Електроємність окремого провідника¹¹ – фізична величина, що чисельно дорівнює заряду, який необхідно надати провіднику для зміни його потенціалу на 1 В: $C = \frac{q}{\varphi}$. Одиниця виміру [C] = Ф (Фарад).

Електроємність кулі радіуса R : $C = 4\pi\epsilon\epsilon_0 R$.

Конденсатор – система з двох, або більше, металевих електродів, розміщених близько один від одного і розділених шаром діелектрика, що здатна накопичувати електричні заряди за певної різниці потенціалів $\Delta\varphi$ (U). Ємність конденсатора:

$$C = \frac{q}{\Delta\varphi}.$$

Електроємність плоского конденсатора:

$$C = \frac{\epsilon\epsilon_0 S}{d},$$

де S – площа перекриття пластин,

d – відстань між ними,

ϵ – діелектрична проникність діелектрика між пластинами.

Електроємність паралельно з'єднаних конденсаторів:

$$C = \sum_i C_i.$$

¹¹ Провідник, що знаходиться в однорідному середовищі далеко від заряджених тіл та інших провідників

Електроємність послідовно з'єднаних конденсаторів:

$$\frac{1}{C} = \sum_i \frac{1}{C_i}.$$

Енергія зарядженого конденсатора: $W = \frac{C\Delta\varphi^2}{2} = \frac{q^2}{2C}.$

Густина енергії електричного поля (енергія одиниці об'єму): $w = \frac{dW}{dV} = \frac{ED}{2}$, де E – напруженість електричного поля, D – електричне зміщення.

Енергія деякого об'єму V для випадку неоднорідного електричного поля: $W = \int_V \frac{ED}{2} dV.$

12.2 Завдання по темі

Умова 12.1-А. Повітряний конденсатор, площа пластин якого $S = 10 \text{ см}^2$, а відстань між пластинами $d = 5 \text{ мм}$, приєднаний до джерела струму, що забезпечує на пластинах різницю потенціалів $U = 60 \text{ В}$.

Знайти:

1. Електроємність конденсатора.
2. Заряд на пластинах.
3. Напруженість електричного поля E між пластинами.
4. Як зміниться ємність конденсатора, якщо відстань між пластинами збільшити до 7 мм .
5. Як зміниться заряд на пластинах, якщо у проміжок між пластинами ввести парафінову пластину ($\varepsilon = 2,0$) товщиною а) 5 мм ; б) 3 мм .
6. Як зміниться ємність, якщо до даного конденсатора приєднати ще один такий самий: а) послідовно, б) паралельно.
7. Чому дорівнює енергія зарядженого конденсатора.
8. Чому дорівнює робота зі зміни відстані між пластинами конденсатора в п.4.

Умова 12.1-Б. На пластини повітряного конденсатора, площа пластин якого $S = 10 \text{ см}^2$, а відстань між пластинами $d = 5 \text{ мм}$, перенесли заряд $q = 5 \text{ мкКл}$.

Знайти:

1. Електроємність конденсатора.
2. Різниця потенціалів між пластинами U .
3. Напруженість електричного поля E між пластинами.
4. Як зміниться ємність конденсатора, якщо відстань між пластинами збільшити до 7 мм .
5. Як зміниться різниця потенціалів на пластинах, якщо в проміжок між пластинами ввести пластину зі слюди ($\varepsilon = 7$). товщиною а) 5 мм ; б) 3 мм .
6. Як зміниться ємність, якщо до даного конденсатора приєднати ще один такий самий а) послідовно, б) паралельно.
7. Чому дорівнює енергія зарядженого конденсатора.
8. Чому дорівнює робота зі зміни відстані між пластинами конденсатора в п.4.

Умова 12.2. Металевій кульці радіусом $R = 2 \text{ см}$ надали заряд $q = 5 \text{ мкКл}$.

Знайти:

1. Електроємність кульки.
2. Потенціал поверхні кульки.
3. Потенціал поля на відстані 5 см від поверхні.
4. Енергію зарядженої кульки.
5. Енергію поля сфери радіусом 10 см , усередині якої перебуває ця кулька.
6. Як зміниться енергія електричного поля кульки, якщо занурити її в гас ($\varepsilon = 2,1$)?

Завдання даної теми розв'язують строго за визначеннями і алгоритмів не потребують.

Тема 13. ЗАКОНИ ПОСТІЙНОГО СТРУМУ

13.1 Основні теоретичні положення

Електричний струм – упорядкований рух заряджених частинок. За напрямок струму умовно приймають напрямок руху позитивних зарядів.

Умови існування електричного струму: наявність вільних зарядів і наявність електричного поля, під дією якого рухаються ці заряди. У металах носіями струму є електрони; у напівпровідниках – електрони й дірки, у газах і рідинах – іони.

Сила струму – скалярна величина, яка чисельно дорівнює заряду, що проходить через поперечний переріз провідника за одиницю часу:

$$I = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{dq}{dt}.$$

Для постійного струму $I = \frac{\Delta q}{\Delta t}.$

Характеристикою розподілу струму по площі поперечного перерізу S , через який він протікає, є **вектор густини струму**

$$\vec{j} = \frac{dI}{dS_{\perp}} \vec{v}.$$

За напрямок $\vec{j}$ обирають напрямок швидкості $\vec{v}$

впорядкованого руху позитивних зарядів.

Густина струму провідності $\vec{j} = qn\vec{v}$, де n – концентрація носіїв струму із зарядом q .

Для підтримки постійного струму в провіднику потрібно забезпечити постійну різницю потенціалів на його кінцях. Отже, у електричному колі повинен знаходитися пристрій, у якому рух позитивних зарядів відбувається у напрямку, протилежному напрямку руху зарядів у зовнішньому колі (від «мінуса» до «плюса»). Сили, що діють на заряди і змушують їх рухатися проти сил електричного поля, називаються **сторонніми силами**. Якби цих сил у колі не існувало, то робота при переміщенні зарядів у замкненому колі тільки за рахунок електростатичних сил дорівняла б нулю. Однак, на практиці відбувається інакше –

в провіднику зі струмом виділяється певна кількість теплоти. Отже, повинно існувати джерело енергії, що підтримує струм у колі та поповнює втрату енергії.

Електрорушійна сила (ЕРС) – величина, яка чисельно дорівнює роботі сторонніх сил при переміщенні одиничного позитивного заряду:

$$\mathcal{E} = \frac{A_{cm}}{q_0}.$$

Розмірність ЕРС збігається з розмірністю напруги: $[\mathcal{E}] = \text{В}$. За аналогією можна ввести поняття напруженості поля сторонніх сил E_{cm} , яка визначає сторонні сили $\vec{F}_{cm} = q \vec{E}_{cm}$.

У загальному випадку, коли на заряди, окрім сторонніх сил, діє також сила електростатичного поля, робота дорівнює:

$$A_{12} = \int_1^2 (\vec{F}_{cm} + \vec{F}_e) d\vec{l} = q \int_1^2 \vec{E}_{cm} d\vec{l} + q \int_1^2 \vec{E}_e d\vec{l} = q\mathcal{E}_{12} + q(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Величина, що чисельно дорівнює роботі, яка виконується електростатичними й сторонніми силами при переміщенні одиничного позитивного заряду, називається **падінням напруги** U_{12} .

Закон Ома для неоднорідної ділянки кола (що має ЕРС):

$$U_{12} = (\varphi_1 - \varphi_2) + \mathcal{E}_{12}.$$

Закон Ома для ділянки кола, опір якого R :

$$U = IR.$$

Опір провідника $R = \rho \frac{l}{S}$, де l – довжина провідника,

S – площа поперечного перерізу, ρ – питомий опір, який залежить від властивостей матеріалу та від температури t :

$\rho = \rho_0 (1 + \alpha \Delta t)$; $\Delta t = (t - 0^\circ\text{C})$, ρ_0 – питомий опір при 0°C , α – температурний коефіцієнт опору.

Послідовне з'єднання провідників: струм через кожний провідник однаковий, напруга в колі дорівнює сумі спаду напруг на кожному провіднику:

$$U = IR = U_1 + U_2 + \dots = I(R_1 + R_2 + \dots)$$

загальний опір $R = R_1 + R_2$.

Паралельне з'єднання провідників: напруга на кожному провіднику однакова й дорівнює загальній напрузі в колі; сума струмів через кожний провідник дорівнює загальному струму в колі:

$$I = I_1 + I_2 + \dots = U/R = U/R_1 + U/R_2 + ,$$

загальний опір $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots = \sum_i \frac{1}{R_i}.$

Будь-яке джерело струму, окрім ЕРС, має деякий внутрішній опір r . Повним опором кола називають суму зовнішнього й внутрішнього опорів $(R + r)$.

Закон Ома для повного кола (замкнене коло з ЕРС):

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r}.$$

Якщо у коло довільним чином (послідовно або паралельно) включено декілька ЕРС і кілька опорів, то для підрахунку повної ЕРС, що діє в колі, і значення сили струму на окремих ділянках, слід користуватися **правилами Г. Кірхгофа**. Якщо в колі є більше, ніж один контур (тобто є елементи, включені паралельно), то вводять поняття **вузла** – точки з'єднання 3-х і більше провідників.

Правило 1. Сума струмів, що входять у будь-який вузол електричного кола, дорівнює сумі струмів, що виходять із цього вузла. Або: алгебраїчна сума струмів, що сходяться у вузлі дорівнює нулю

$$\sum_i I_i = 0.$$

Якщо у контурі n вузлів достатньо $(n-1)$ рівняння 1-го правила.

Правило 2. У замкненому контурі, сума спадів напруг на кожному елементі, дорівнює сумі ЕРС, які діють у цьому контурі:

$$\sum_k I_k R_k = \sum_n \mathcal{E}_n.$$

Якщо у контурі m гілок (ділянка електричного кола між двома вузлами) та n вузлів достатньо $(m - n + 1)$ рівняння 2-го правила.

Насамперед, слід визначитися з напрямком струму в колі: струм позитивний, якщо його напрямок співпадає з напрямком руху позитивних зарядів. Друга умова: струм завжди спрямований від точки з більшим потенціалом до точки з меншим потенціалом. Різниця між значеннями потенціалу в точках, до елемента кола і після цього елемента, називається спадом напруги на елементі кола. Тому, при проходженні струму через активний опір $U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 > 0$, закон Ома записується у вигляді: $U = IR$.

Під час розв'язування конкретного завдання, потрібно обрати напрямок струмів у ділянках кола й не змінювати ці напрямки у процесі розв'язку. Якщо знак струму був обраний неправильно, то розв'язок покаже це: струм у відповіді буде мати знак «-».

Закон Джоуля-Ленца: кількість теплоти, що виділяється на зовнішньому опорі $dQ = I^2 R dt$.

Інтегральна форма закону Джоуля-Ленца: $Q = \int_{t_1}^{t_2} I^2 R dt$.

Потужність джерела струму $P = \mathcal{E}I$ витрачається на дві складові (якщо немає хімічних змін у колі й руху провідників), а саме: на потужність, що втрачається на активному опорі $P_a = I^2 R$ й потужність, що втрачається на власному (внутрішньому) опорі джерела струму $P_r = I^2 r$. У результаті коефіцієнт корисної дії джерела струму $\eta = \frac{P_a}{P_a + P_r} = \frac{R}{R + r}$.

13.2 Завдання на визначення

Завдання 13.1. До кінців вольфрамового провідника, довжиною $l = 10$ см і діаметром $d = 2$ мм, прикладена різниця потенціалів, що змінюється за законом:

а) $U = 0,5t^2 - 0,1t$, В; б) $U = 10 - 0,2t$, В.

Знайти:

1. Опір провідника.

2. Закон, за яким змінюється сила струму в провіднику.
3. Заряд q , що пройшов через поперечний переріз провідника за $t = 3$ с.
4. Заряд q , що пройшов через поперечний переріз провідника за п'яту секунду.
5. Кількість теплоти, що виділилася в провіднику за перші 2 с.

Завдання 13.2. Струм через ніхромовий провідник довжиною $l = 5$ см і поперечним перерізом $S = 2 \text{ мм}^2$ рівномірно зменшується від 5 А до 1 А за час 10 с.

Знайти:

1. Опір провідника.
2. Закон за яким змінюється сила струму в провіднику.
3. Закон за яким змінюється напруга на кінцях провідника.
4. Заряд, що пройшов через поперечний переріз провідника за час до повного зникнення струму.
5. Кількість теплоти, що виділилася в провіднику за 5 с.

13.3 Завдання по темі

На рисунках 13.1 – 13.6 зображено електричні схеми.

Джерела струму $\mathcal{E}_1 = 10$ В и $\mathcal{E}_2 = 3$ В з внутрішнім опором $r_1 = 0,5$ Ом і $r_2 = 0,2$ Ом, відповідно. Опір $R_1 = 2$ Ом, $R_2 = 4$ Ом, $R_3 = 5$ Ом.

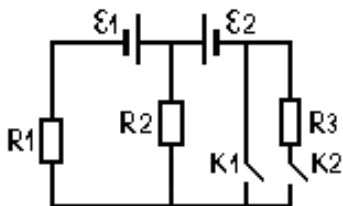


Рисунок 13.1

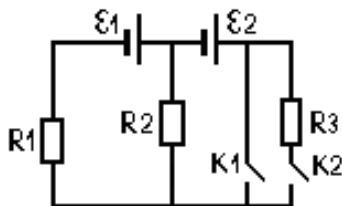


Рисунок 13.2

Варіанти електричних схем на рис. 13.1 і 13.2: замкнені

- а) ключ K1, б) ключ K2, в) ключ K1 і ключ K2.

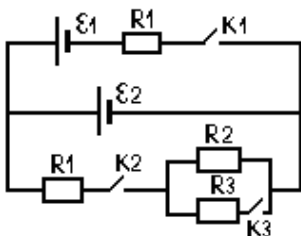


Рисунок 13.3

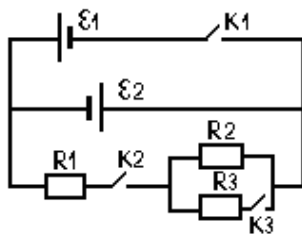


Рисунок 13.4

Варіанти електричних схем на рис.13.3 і 13.4: замкнені
а) ключі K_1, K_2 ; б) ключі K_1, K_2 і K_3 ; в) ключі K_2, K_3 .

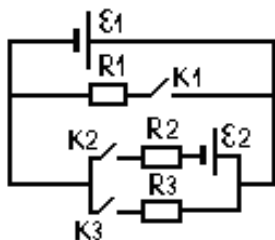


Рисунок 13.5

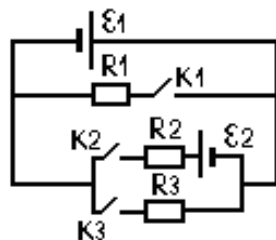


Рисунок 13.6

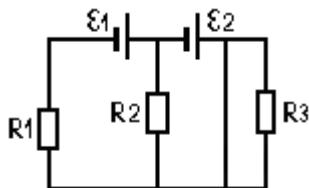
Варіанти електричних схем на рис. 13.5 і 13.6: замкнені
а) ключі K_1, K_2 ; б) ключі K_1, K_2 і K_3 ; в) ключі K_2, K_3 .

Знайти:

1. Струми, що проходять через опори, та спад напруги на них;
2. Корисну потужність, що виділяється на опорі R_1 ;
3. Повну потужність джерел струму.

Приклад розв'язування завдання

Оберемо умову: рис. 13.2 в)
(замкнено обидва ключа).



У даному випадку, струм через опір R_3 проходить не буде, так як він закорочений. Перемалюємо схему (рис. 13.7) і

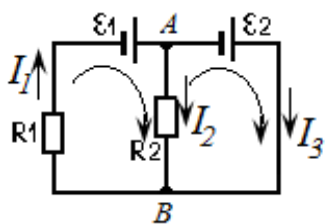


Рисунок 13.7

вказемо напрямок струмів у різних ділянках кола (струм іде від плюса до мінуса джерела струму). Напрямок обходу контурів вибираємо довільно, але доцільно обрати напрямок, що збігається з напрямком струму.

1. Так як в електричній схемі всього два вузла (точки А і В) досить записати одне рівняння згідно з першим правилом Кірхгофа. Струм I_1 входить у вузол А, а струми I_2 і I_3 виходять, а отже у рівнянні вони будуть із різними знаками: $I_1 - I_2 - I_3 = 0$.

Вибираємо контури для запису рівнянь за другим правилом Кірхгофа:

Контур А, R₂, В, R₁, ε₁. Струми збігаються з напрямком обходу контуру, тому всі складові зі знаком «+»:

$$I_1(R_1 + r_1) + I_2 R_2 = \varepsilon_1.$$

(Не забуваємо враховувати опори джерел струму!) Контур А, ε₂, В, R₂: струм I_2 тече проти напрямку обходу контуру, отже

$$I_3 r_2 - I_2 R_2 = \varepsilon_2.$$

Ми одержали систему трьох рівнянь з трьома невідомими:

$$\begin{cases} I_1 - I_2 - I_3 = 0; \\ I_1(R_1 + r_1) + I_2 R_2 = \varepsilon_1; \\ I_3 r_2 - I_2 R_2 = \varepsilon_2. \end{cases}$$

Систему буде легше розв'язувати, якщо підставити числові значення з умови:

$$\begin{cases} I_1 - I_2 - I_3 = 0; \\ 2,5I_1 + 4I_2 = 10; \\ 0,2I_3 - 4I_2 = 3. \end{cases}$$

Визначник системи: $D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2,5 & 4 & 0 \\ 0 & -4 & 0,2 \end{vmatrix} = 11,3 \cdot$

Додаткові визначники: $D_{I_1} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 10 & 4 & 0 \\ 3 & -4 & 0,2 \end{vmatrix} = 54;$

$$D_{I_2} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2,5 & 10 & 0 \\ 0 & 3 & 0,2 \end{vmatrix} = -5,5 ; \quad D_{I_3} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2,5 & 4 & 10 \\ 0 & -4 & 3 \end{vmatrix} = 59,5 \cdot$$

У результаті отримуємо:

$$I_1 = \frac{D_{I_1}}{D} = 4,78 \text{ A}, \quad I_2 = \frac{D_{I_2}}{D} = -0,48 \text{ A} \quad \text{і} \quad I_3 = \frac{D_{I_3}}{D} = 5,26 \text{ A}.$$

Знак «-» струму I_2 означає, що струм тече від вузла В до вузла А.

Спад напруги (за законом Ома)

на опорі R_1 $U_1 = I_1 \cdot R_1 = 4,78 \cdot 2 = 9,56 \text{ (В)},$

на опорі R_2 $U_2 = I_2 \cdot R_2 = 0,48 \cdot 4 = 1,92 \text{ (В)}.$

2. Корисну потужність визначаємо за законом Джоуля-Ленца:

$$P_1 = I_1 U_1 = 4,78 \cdot 9,56 = 45,7 \text{ (Вт)}$$

3. Повна потужність джерел струму:

$$P = I_1 \mathcal{E}_1 + I_2 \mathcal{E}_2 = 4,78 \cdot 10 + 5,26 \cdot 3 = 63,58 \text{ (Вт)}.$$

Тема 14. ЕЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ

14.1 Основні теоретичні положення

Магнітне поле створюється рухомими електричними зарядами, або змінним (вихровим) електричним полем і діє лише на рухомі електричні заряди.

Силова характеристика магнітного поля – **вектор магнітної індукції** $\vec{B}$. **Закон Біо–Савара–Лапласа** визначає величину й напрямок вектора магнітної індукції $d\vec{B}$, у точці на відстані $\vec{r}$ від елемента $d\vec{l}$ струму I :

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I [d\vec{l}, \vec{r}]}{r^3};$$

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dl \sin \alpha}{r^2}.$$

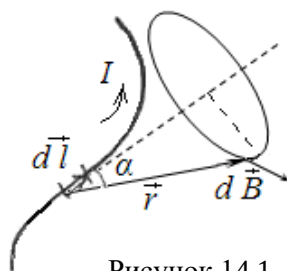


Рисунок 14.1

Одиниця виміру $[B] = \text{Тл}$ (Тесла).

Постійна μ_0 визначається вибором одиниць виміру електричних і магнітних величин і називається магнітною сталою. У СІ $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Тл} \cdot \text{м} \cdot \text{А}^{-1}$.

Силова лінія магнітного поля в точці, яка розташована на відстані $\vec{r}$ від елемента dl струму I – являє собою замкнене коло радіуса $R = r \sin \alpha$ із центром, що лежить на лінії струму (рис. 14.1). Напрямок силових ліній визначається за **правилом правого гвинта**: якщо поступальний рух гвинта збігається з напрямком електричного струму, то напрямком обертання рукоятки гвинта показує напрямок індукції магнітного поля.

Індукція магнітного поля прямого провідника скінченної довжини в точці, що знаходиться на відстані a від провідника зі струмом:

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} (\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2),$$

де φ_1 і φ_2 – кути, під якими видно кінці провідника з точки, у якій визначається поле (див. рис.14.2). Якщо відстань a набагато менше довжини провідника зі струмом, то провідник називають нескінченно довгим, тоді $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$.

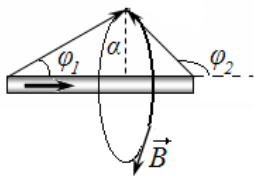


Рисунок 14.2

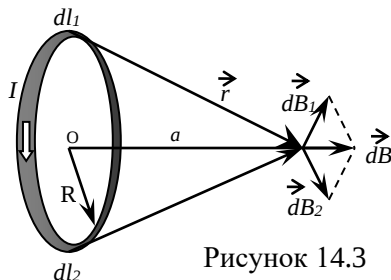


Рисунок 14.3

Індукція магнітного поля на осі колового струму (рис.14.3):

$$\vec{B} = \oint d\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I(\pi R^2)}{(R^2 + a^2)^{3/2}} \vec{n} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\vec{p}_m}{(R^2 + a^2)^{3/2}},$$

де R – радіус витка зі струмом I ;

a – відстань від центру кільця O до точки A на осі;

$\vec{p}_m = IS\vec{n}$ – **магнітний момент колового струму**.

На великих відстанях від кільця зі струмом, ($a \gg R$),

індукція поля в центрі витка: $B = \frac{\mu_0 I}{2R}$.

Потік вектора магнітної індукції через одиничний елемент поверхні dS :

$$d\Phi = B dS \cos \alpha = B_n dS.$$

Повний потік через замкнену поверхню S :

$$\Phi = \oint (\vec{B}, \vec{n}) dS,$$

де $\vec{n}$ – нормаль до елемента поверхні dS .

Одиниця виміру магнітного потоку $[\Phi] = \text{Вб}$ (Вебер).

Теорема Гауса: магнітний потік крізь довільну замкнену поверхню дорівнює нулю: $\oint (\vec{B}, \vec{n}) dS = 0$.

Циркуляцією вектора $\vec{B}$ називається скалярна величина:

$$\Omega = \oint (\vec{B}, d\vec{l}) .$$

Закон повного струму: циркуляція вектора магнітної індукції по довільному замкненому контуру дорівнює алгебраїчній сумі всіх струмів, що охоплені цим контуром, помножених на магнітну сталу:

$$\oint (\vec{B}, d\vec{l}) = \mu_0 \sum_k I_k .$$

Магнітний момент струму: $\vec{p}_m = IS \vec{n}$, де S – площа, яку охоплює замкнений контур зі струмом I , $\vec{n}$ – нормаль до площини S .

Так як виникнення магнітного поля обумовлене рухом частинок, що мають заряд q і масу m , існує зв'язок магнітного моменту й механічного моменту імпульсу, так зване

гіромагнітне співвідношення: $\vec{p}_m = -\frac{q}{2m} \vec{L}$, де $\vec{L}$ – механічний момент імпульсу заряду що рухається.

Напруженість магнітного поля – величина, що не залежить від магнітних властивостей середовища: $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu \mu_0}$, де μ – магнітна проникність середовища.

Парамагнетики – слабوماгнітні речовини, у зовнішньому магнітному полі намагнічуються у напрямку поля $\mu > 1$.

Діамагнетики – слабوماгнітні речовини, у зовнішньому магнітному полі намагнічуються проти напрямку поля $\mu < 1$.

Феромагнетики – речовини, здатні сильно намагнічуватися в магнітному полі $\mu \sim 10^2$ - 10^5 і зберігати свою намагніченість за відсутності зовнішнього магнітного поля.

Дія магнітного поля:

1. На елемент $d\vec{l}$ провідника зі струмом I , у магнітному полі, індукція якого B , діє сила, напрям і величина якої визначається **законом Ампера:**

$$d\vec{F} = I \left[d\vec{l}, \vec{B} \right],$$

скалярний запис $dF = I dl B \sin \alpha$.

Напрямок сили Ампера (**правило лівої руки**) (рис.14.4): якщо ліву руку розташувати так, щоб лінії індукції магнітного поля входили в долоню, а чотири пальці були спрямовані вздовж напрямку електричного струму, то відігнутий великий палець покаже напрям дії сили Ампера.

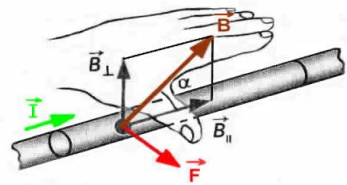


Рисунок 14.4

2. На рамку площею S зі струмом I , у зовнішньому магнітному полі, діє момент сили, що намагається повернути цю рамку й встановити її перпендикулярно до поля:

$$\vec{M} = [\vec{p}_m, \vec{B}], \quad M = p_m B \sin \alpha.$$

За цією дією вводять визначення силової характеристики магнітного поля – **вектор магнітної індукції** – це величина, яка чисельно дорівнює відношенню максимального механічного моменту сил, що діє на рамку зі струмом, в однорідному полі, до її магнітного моменту.

3. На точковий електричний заряд q , що рухається зі швидкістю v в магнітному полі з індукцією B , з боку поля діє **сила Лоренца**:

$$\vec{F} = q[\vec{v}, \vec{B}], \quad F = qvB \sin \alpha.$$

У загальному випадку, коли початкова швидкість частинки не перпендикулярна напрямку магнітної індукції, частинка рухається по гвинтовій лінії (траєкторія “намотується” на силові лінії поля). Радіус гвинтової траєкторії у цьому випадку

$$R = \frac{m v \sin \alpha}{q B}, \quad \text{крок} - h = v \cos \alpha \cdot T = 2\pi R \operatorname{ctg} \alpha = v \cos \alpha \cdot \frac{2\pi m}{B q},$$

тут T – час, за який частинка проходить по колу.

Сила Лоренца є доцентровою і роботу не виконує.

Робота при переміщенні провідника зі струмом у магнітному полі:

$$A = \int I d\Phi = I \Delta\Phi.$$

Роботу по переміщенню провідника виконують або сторонні сили, або механічні сили, так як магнітне поле неконсервативне і воно не може змінювати кінетичну енергію провідника.

Явище електромагнітної індукції: у замкненому провідному контурі виникає струм під час зміни (з будь-якої причини) потоку магнітної індукції крізь поверхню, обмежену цим контуром. Таким чином, магнітний потік є функцією часу: $\Phi_B = \Phi(t)$.

Закон Фарадея: ЕРС індукції, в замкненому контурі, рівна швидкості зміни потоку магнітної індукції крізь цей контур,

взятої зі знаком «-»:

$$\mathcal{E}_i = - \frac{d\Phi_B}{dt}.$$

Знак «-» у цій формулі пояснює **правило Ленца**: магнітне поле індукційного струму завжди протидіє тій зміні магнітного потоку крізь контур, яке викликало цей струм.

Так як магнітне поле не може змусити рухатися електричні заряди, то поява індукційного струму в колі обумовлена виникненням індукованого електричного поля. Особливістю цього поля є те, що його силові лінії замкнені (силові лінії звичайного електричного поля завжди починаються на позитивних і закінчуються на негативних зарядах). Індуковане електричне поле називають **вихровим електричним полем** за аналогією з вихровим магнітним полем. Отже, закон електромагнітної індукції можна переформулювати: змінне магнітне поле породжує змінне вихрове електричне поле

$$\oint \vec{E}_B d\vec{l} = - \frac{\partial \Phi_B}{\partial t}.$$

За відсутності зовнішнього магнітного поля, струм, що тече по провіднику, створює навколо себе магнітне поле. Якщо провідник зі струмом деяким чином замкнути, то повний потік (**потокозчеплення**) крізь цю замкнену поверхню: $\Psi = LI$. Коефіцієнт пропорційності L між магнітним потоком у контурі й

виникаючим у контурі струмом називається коефіцієнтом самоіндукції, або просто **індуктивністю контуру**.

Явище самоіндукції: якщо струм у контурі з індуктивністю L змінний, то в ньому виникає ЕРС самоіндукції:

$$\mathcal{E}_{si} = -L \frac{dI}{dt}.$$

Розмірність індуктивності: $[L] = \text{В} \cdot \text{с} \cdot \text{А}^{-1} = \text{Гн}$ (Генрі).

Соленоїд – сукупність N витків, намотаних на загальний каркас, з площею поперечного перерізу S і довжиною l , зі струмом I одного напрямку. Нескінченно довгий соленоїд, це соленоїд, діаметр поперечного перерізу якого набагато менше довжини. У цьому випадку: індукція однорідного магнітного поля усередині соленоїда $B = \mu \mu_0 I n$, де n – кількість витків на одиниці довжини, μ – магнітна проникність феромагнітного осердя соленоїда.

Повний потік індукції магнітного поля у соленоїді, або потокозчеплення:

$$\Psi = N\Phi = N\mu\mu_0 I n S = \mu\mu_0 n^2 l S I.$$

Індуктивність довгого соленоїда: $L = \mu\mu_0 n^2 l S$.

Явище взаємної індукції: виникнення ЕРС індукції у двох взаємозв'язаних контурів, при протіканні струму хоча б в одному з них: $\mathcal{E}_2 = -L_{12} \frac{dI_1}{dt}$, де L_{12} – коефіцієнт взаємної індукції.

Енергія W_m соленоїда зі струмом: $W_m = \frac{L I^2}{2}$.

Так як, індукційний струм породжується вихровим електричним полем, яке, у свою чергу, породжується зміною магнітного поля, останню формулу слід розуміти як формулу для енергії магнітного поля, що створена цим струмом. Використовуючи характеристики поля, енергію магнітного поля соленоїда можна записати: $W = \frac{BH}{2} V$, де V – об'єм соленоїда.

Густина енергії магнітного поля: $w = \frac{W}{V} = \frac{BH}{2}$,

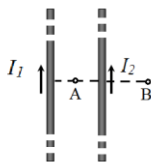
де B – індукція, H – напруженість магнітного поля.

$$\text{Енергія неоднорідного магнітного поля: } W = \int_V \frac{BH}{2} dV.$$

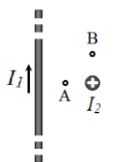
14.2 Завдання по темі

Умова 14.1. Визначити індукцію магнітного поля у точці згідно з варіантом (рис. 14.5 – 14.9), якщо по провіднику 1 тече струм $I_1 = 10$ А, а по провіднику 2 $I_2 = 20$ А.

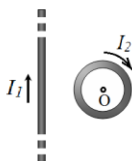
Геометричні розміри: $I_1A = I_2A = I_2B = I_2C = 10$ см; радіуси кругових елементів струмів $R = 10$ см; на рис. 13.7 відстань $I_1O = 20$ см.



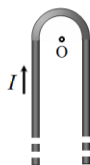
Рисунки 14.5



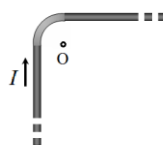
14.6



14.7



14.8



14.9

Умова 14.2. Заряд $Q = 80$ нКл рівномірно розподілений:

- по тонкому кільцю радіусом 10 см;
- по стрижню довжиною 20 см;
- по диску радіусом 10 см;
- по тонкій спіралі з 5 витків радіусом 15 см;

які обертаються навколо осі, що проходить через центр інерції перпендикулярно площині обертання із частотою $n = 10$ с⁻¹.

Знайти магнітний момент p_m , обумовлений обертанням.

Умова 14.3-А. Електрон пройшов прискорюючу різницю потенціалів $U = 1$ кВ і влетів в однорідне магнітне поле з індукцією $B = 35$ мТл під кутом $\alpha = 30^\circ$; 60° ; 90° .

Умова 14.3-Б. Електрон пройшов прискорюючу різницю потенціалів $U = 5$ кВ і влетів у конденсатор уздовж його осі.

Напруженість поля конденсатора $E = 10$ кВ/м, довжина конденсатора по осі 5 см. Вийшовши з конденсатора, електрон потрапив в однорідне магнітне поле з індукцією $B = 50$ мТл, спрямоване перпендикулярно електричному полю.

Знайти:

1. Швидкість, з якою електрон буде рухатися в магнітному полі.
2. Параметри гвинтової траєкторії: радіус R і крок h .
3. Період обертання електрона T .
4. Силу еквівалентного колового струму $I_{\text{екв}}$, створеного рухом електрона в магнітному полі.
5. Магнітний момент p_m еквівалентного колового струму $I_{\text{екв}}$.

Умова 14.4. З мідного дроту поперечним перерізом 2 мм^2 і довжиною 1 м зроблено контур:

а) квадратний; б) круглий; в) спіраль з 2 витків; який перебуває в магнітному полі з індукцією $B = 5$ мТл так, що лінії індукції створюють із площиною контуру кут $\alpha = 30^\circ$; 45° ; 60° ; 90° .

Знайти:

1. Магнітний потік крізь контур.
2. Роботу, яку потрібно виконати, щоб повернути нормаль контуру на 90° , якщо по дроту тече струм $I = 5$ А.
3. Заряд q , який протікає по дроту, якщо:
 - а) виключити магнітне поле;
 - б) повернути контур на 60° ;
 - в) смикнути за кінці і розпрямити контур.
4. Максимальну ЕРС, яка індукована в контурі, якщо контур обертається навколо одного із діаметрів з кутовою швидкістю $\omega = 50$ рад/с.
5. Середню ЕРС, яка індукована в контурі за час $t = \frac{1}{4} T$, якщо контур обертається навколо одного з діаметрів з кутовою швидкістю $\omega = 50$ рад/с.
6. Кількість теплоти, що виділиться у дроті при виключенні магнітного поля за час $\Delta t = 10$ мс.

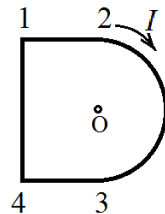
Умова 14.5. Із дроту діаметром $d = 1$ мм і довжиною $l = 5$ м на немагнітний каркас діаметром $D = 2$ см намотаний соленоїд. По соленоїду тече струм $I_0 = 1,6$ А.

Знайти:

1. Індуктивність соленоїда.
2. Магнітний потік крізь поперечний переріз соленоїда.
3. Потокозчеплення в соленоїді.
4. Середню ЕРС, якщо струм зменшується при вимиканні до нуля за $\Delta t = 0,2$ мс.
5. Закон зміни ЕРС, якщо струм почне змінюватися за законом $I = 0,25 \sin 10\pi t$, А.
6. Як зміниться індуктивність соленоїда, якщо всередину нього вставити феромагнітне осердя 1 (2, 3), крива намагнічування якого показана на рисунку Додаток А.

Приклад розв'язування завдань подібних до умови 14.1

Знайти індукцію магнітного поля в т.О. По провіднику тече струм $I = 5$ А. Геометричні розміри контуру: радіус півкола $R = 5$ см, сторони 1-2 і 3-4 дорівнюють радіусу R , сторона 1-4 рівна $2R$.



Провідник складної форми можна представити як сукупність ділянок, магнітне поле яких розраховують за відомими формулами. Дана форма контуру складається з півкола 2-3 і трьох лінійних провідників 1-2, 3-4 і 4-1. Таким чином, за принципом суперпозиції, індукція результуючого поля

$$\vec{B} = \sum \vec{B}_i = \vec{B}_{12} + \vec{B}_{23} + \vec{B}_{34} + \vec{B}_{41}.$$

Перевіримо напрямки векторів усіх складових за правилом правого гвинта: вони усі спрямовані однаково – перпендикулярно до площини контуру та від нас. Тому:

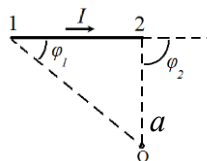
$$B = B_{12} + B_{23} + B_{34} + B_{41}.$$

Індукція магнітного поля колового струму $B = \frac{\mu_0 I}{2R}$, отже

поле ділянки 2-3 $B_{23} = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 I}{2R}$.

Індукція магнітного поля провідника зі струмом скінченної довжини: $B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} (\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2)$ За умовою $a = R$.

З рисунка видно, як на ділянці 1-2 визначити кути φ_1 і φ_2 : $\varphi_1 = 45^\circ$, $\varphi_2 = 90^\circ$.



$$B_{12} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} (\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2) = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} (\cos 45^\circ - \cos 90^\circ) = \frac{\mu_0 I \sqrt{2}}{8\pi R}.$$

Ділянка 3-4 є дзеркальним відображенням ділянки 1-2, отже $B_{12} = B_{34}$. Для ділянки 4-1 $\varphi_1 = 45^\circ$, $\varphi_2 = 135^\circ$.

$$B_{41} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} (\cos 45^\circ - \cos 135^\circ) = \frac{\mu_0 I \sqrt{2}}{4\pi R}.$$

Дане значення можна було одержати простіше – ділянка 4-1 складається із двох частин 1-2, а отже $B_{41} = 2 B_{12}$.

У підсумку:

$$\begin{aligned} B &= 4B_{12} + B_{23} = 4 \frac{\mu_0 I \sqrt{2}}{4\pi R} + \frac{\mu_0 I}{4R} = \frac{\mu_0 I}{4R} \left(\frac{4\sqrt{2}}{\pi} + 1 \right) = \\ &= \frac{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot 5}{4 \cdot 0,05} \left(\frac{4 \cdot \sqrt{2}}{\pi} + 1 \right) = 88 \cdot 10^{-6} \text{ (Тл)}. \end{aligned}$$

Відповідь: $B = 88 \text{ мкТл}$.

Приклад розв'язку завдання умови 14.2

Знайти магнітний момент p_m , що виникає при обертанні зарядженого стрижня довжиною $l = 10$ см навколо осі, що проходить через його кінець. Заряд стрижня $q = 1$ мкКл, частота обертання $n = 20$ об/хв.

Такі завдання краще розв'язувати за допомогою гіромагнітного співвідношення $p_m = \frac{q}{2m} L$.

Момент імпульсу стрижня $L = J\omega$, де ω – кутова швидкість обертання, яка пов'язана з частотою обертання співвідношенням $\omega = 2\pi n$; J – момент інерції стрижня, відносно осі, що проходить через його кінець. Враховуючи теорему Штейнера $J = \frac{1}{3} ml^2$.

$$\text{У підсумку } p_m = \frac{q}{2m} \frac{1}{3} ml^2 \omega = \frac{1}{6} ql^2 \omega.$$

Остаточні розрахунки:

$$p_m = \frac{1}{6} ql^2 (2\pi n)^2 = \frac{1}{6} \cdot 10^{-6} \cdot 0,1^2 \left(4 \cdot 3,14 \cdot \frac{20}{60} \right)^2 = 2,92 \cdot 10^{-8} (\text{А} \cdot \text{м}^2).$$

Відповідь: $p_m = 2,92 \cdot 10^{-8} \text{ А} \cdot \text{м}^2$.

Завдання інших умов вирішуються за визначеннями і додаткових роз'яснень не потребують.

Тема 15. ХВИЛЬОВА ОПТИКА

15.1 Основні теоретичні положення

Електромагнітне поле поширюється в просторі хвильовим способом. Рівняння електромагнітної хвилі (хвильове рівняння) є наслідком розв'язку системи рівнянь Максвелла. Це система двох зв'язаних рівнянь для напруженості електричного поля $\vec{E}$ та напруженості магнітного поля $\vec{H}$:

$$\begin{cases} \Delta \vec{E} = \varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}; \\ \Delta \vec{H} = \varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} \end{cases} \quad \text{– типові хвильові рівняння}^{12},$$

у яких коефіцієнт перед другою похідною по часу є зворотною фазовою швидкістю хвилі у квадраті: $\varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0 = \frac{1}{v^2}$.

Діелектрична і магнітна проникність вакууму $\varepsilon, \mu = 1$, тоді швидкість світла у вакуумі $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = 3 \cdot 10^8$ м/с.

Показник заломлення середовища $n = \frac{c}{v} = \sqrt{\varepsilon \mu}$, де ε і μ

– діелектрична і магнітна проникність середовища.

Диференціальне рівняння плоскої електромагнітної хвилі, що поширюється уздовж напрямку Ох:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \mu \mu_0 \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}; \\ \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} = \mu \mu_0 \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2} \end{cases}.$$

¹² лапласіан $\Delta \vec{E} = \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2}$

Розв'язком цих диференціальних рівнянь будуть рівняння електромагнітної хвилі

$$\begin{cases} E_y = E_m \cos(\omega t - kx + \alpha_1); \\ H_z = H_m \cos(\omega t - kx + \alpha_2) \end{cases},$$

де ω – циклічна частота,

k – хвильове число.

Вектор напруженості електричного поля $\vec{E}$ називають **світловим вектором**.

Електромагнітна хвиля переносить енергію. **Вектор густини потоку енергії** (вектор Пойтинга) чисельно дорівнює кількості енергії ΔW , яка переноситься за одиницю часу Δt крізь одиничну поверхню $\Delta S_{\perp}$ у перпендикулярному до неї

напрямку:
$$P = \frac{\Delta W}{\Delta S_{\perp} \Delta t} = \frac{w \Delta V}{\Delta S_{\perp} \Delta t} = \frac{w \Delta S_{\perp} v \Delta t}{\Delta S_{\perp} \Delta t} = w v; \quad \vec{P} = w \vec{v}.$$

Тут $w = w_E + w_H = \frac{1}{2} \varepsilon \varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2} \mu \mu_0 H^2$ – густина енергії

електромагнітного поля, що поширюється зі швидкістю v . Враховуючи взаємозв'язок E та H , а також напрямок швидкості, одержимо **вектор Пойтинга** $\vec{P} = [\vec{E} \vec{H}]$.

Інтенсивність електромагнітних хвиль – середня енергія, яку переносить хвиля за період крізь одиничну поверхню, перпендикулярну поширенню хвилі. Для лінійно-поляризованої хвилі

$$I = \langle \vec{P} \rangle = \left\langle [\vec{E} \vec{H}] \right\rangle = \frac{1}{T} \int_0^T E_m H_m \cos^2(\omega t - kx) dt = \frac{1}{2} E_m H_m = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon \varepsilon_0}{\mu \mu_0}} E_m^2$$

До світлових хвиль (які вивчає оптика) відносять діапазон видимих електромагнітних хвиль із довжинами хвиль від 380 нм (фіолетовий) до 760 нм (червоний).

Монохроматичним називають «чисте» світло однієї частоти (чи довжини хвилі). Біле світло не є «чистим» – воно розкладається в суцільний спектр, що складається із усіх кольорів веселки.

Когерентними називають хвилі, різниця фаз яких не змінюється ні в просторі, ні в часі.

Інтерференція світла – явище перерозподілу енергії світлового потоку в просторі при накладанні двох (або декількох) когерентних світлових хвиль, у результаті чого в одних місцях виникають максимуми, а в інших – мінімуми інтенсивності.

Для одержання когерентних світлових хвиль застосовують метод поділу променя, що випромінюється одним джерелом, на дві частини і більше, які, після проходження різних оптичних шляхів, накладаються один на одного.

В оптиці шлях, що проходить світло, вимірюють довжиною хвилі λ , яка в свою чергу, залежить від показника заломлення $\lambda = \frac{\lambda_0}{n}$, де λ_0 – довжина хвилі у вакуумі, тому

вводять поняття: **оптична довжина шляху** $L = nS$. Нехай розділення однієї хвилі на дві когерентні, відбувається в деякій точці О, що знаходиться на межі двох середовищ. До точки М, у якій спостерігається інтерференційна картина, одна хвиля у середовищі з показником заломлення n_1 пройшла шлях S_1 , друга – у середовищі з показником заломлення n_2 – шлях S_2 . Тоді різниця оптичних довжин шляхів, які проходять хвилі називається **оптична різниця ходу**

$$\Delta = |L_2 - L_1| = |n_1 S_1 - n_2 S_2|.$$

Умова інтерференційних максимумів: оптична різниця ходу дорівнює цілому числу хвиль. Отже, коливання, що збуджуються в деякій точці обома хвилями, будуть відбуватися в однаковій фазі, підсилюючи один одного $\Delta = \pm m\lambda$, де $m = 0, 1, 2, \dots$

Умова інтерференційних мінімумів: оптична різниця ходу дорівнює напівцілому числу хвиль і коливання, що збуджуються в деякій точці обома хвилями, будуть відбуватися в протифазі, гасячи один одного $\Delta = \pm (2m + 1) \frac{\lambda}{2}$, де $m = 0, 1, 2, \dots$

Щілини Юнга – найпростіший пристрій для спостереження інтерференції – екран з двома вузькими, дуже близько розташованими щілинами. При цьому на другому екрані спостерігається інтерференційна картина: чергування темних і світлих смуг. Положення світлих максимумів $x_{\max} = \pm \frac{l\lambda}{d}m$, де m – порядок максимуму, d – відстань між щілинами, l – відстань від екрана з щілинами до екрана спостереження; положення мінімумів $x_{\min} = \pm \frac{l\lambda}{d}\left(m + \frac{1}{2}\right)$.

Ширина інтерференційної смуги дорівнює відстані між двома сусідніми мінімумами $\Delta x = \frac{l\lambda}{d}$. У двопроменевій інтерференції ця відстань дорівнює відстані між сусідніми максимумами.

Інтерференція в тонких плівках (рис.15.1):

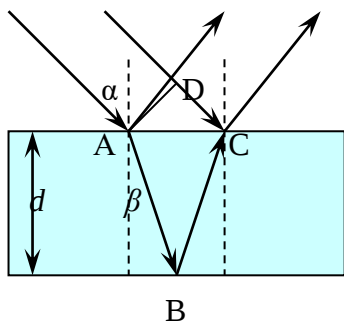


Рисунок 15.1

оптична різниця ходу при спостереженні за відбитими променями

$$\Delta = (AB + BC)n - DC \pm \lambda/2.$$

Після математичних перетворень, з урахуванням закону заломлення світла¹³:

$$\Delta = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} \pm \lambda/2,$$

де n – відносний показник заломлення плівки, α – кут падіння світла.

Доданок $\pm \lambda/2$ обумовлений втратою півхвилі при відбиванні світла від межі двох середовищ. Якщо $n > n_0$ (n_0 –

¹³ $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n$, де α – кут падіння, β – кут заломлення

показник заломлення середовища, у якому перебуває плівка), то втрата півхвилі відбувається при відбиванні від верхньої поверхні плівки, і доданок буде мати знак мінус, якщо ж $n < n_0$, то втрата півхвилі відбувається на нижній поверхні плівки, і $\lambda/2$ буде мати знак плюс. У випадку інтерференції світла, що проходить крізь плівку, втрати півхвилі не буде.

Отже, результати спостереження інтерференції залежать від товщини d і від кута падіння α . Якщо умова максимуму інтерференції виконується періодично при плавній зміні товщини плівки, то картину називають **смуги рівної товщини**, якщо ж виявляється залежність від кута падіння – **смуги рівного нахилу**.

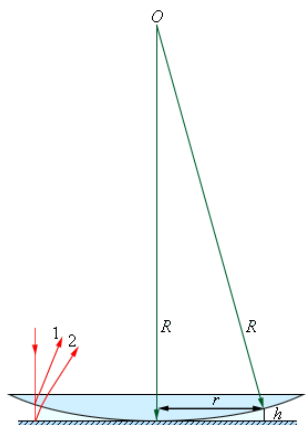


Рисунок 15.2

Смуги рівної товщини спостерігають під час дослідження кілець Ньютона (рис. 15.2). Плівкою, на якій відбувається поділ променів, є повітряний шар, товщиною h між лінзою з великим радіусом кривизни R і скляною пластинкою.

Радіуси темних кілець у відбитому і світлих кілець Ньютона у прохідному світлі $r_m = \sqrt{m\lambda R}$, де $m = 1, 2, 3, \dots$ – номер кільця, R – радіус кривизни лінзи.

Дифракція: явище огинання світловою хвилею границь непрозорих тіл з утворенням інтерференційного перерозподілу енергії по різних напрямках (рис.15.3).

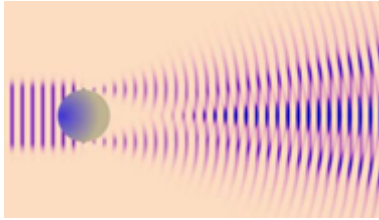


Рисунок 15.3

Принцип Гюйгенса-Френеля: кожна точка фронту хвилі є джерелом вторинних хвиль, що поширюються з характерною для даного середовища швидкістю. Огинаючи цих хвиль дає положення фронту хвилі у наступний момент часу. Усі точки фронту хвилі коливаються з однаковою частотою і в однаковій фазі, отже, являють собою сукупність когерентних джерел. Розрахунки амплітуд і фаз вторинних хвиль дозволяють знайти амплітуду результуючої хвилі у довільній точці простору.

Дифракція Френеля (від сферичного фронту хвилі).

Для пояснення дифракції використовують метод зон Френеля (рис. 15.4): фронт хвилі розбивають на кільцеві ділянки рівної площі. Край кожної наступної зони відстоїть від точки спостереження P на $\lambda/2$ від попередньої. Це призводить до того, що результуючі амплітуди двох сусідніх зон спрямовані в протилежні сторони. При накладанні хвиль від двох таких зон відбувається їхнє взаємознищення, а отже, спостерігається мінімум інтенсивності. Загальна картина спостереження визначається співвідношенням площ від парних і непарних зон, що проходять через отвір радіуса R .

Якщо через отвір проходить **парне** число зон Френеля, то в центрі дифракційної картини спостерігається темна пляма, якщо непарне, то світла.

$$\text{Радіуси зон Френеля: } r_m = \sqrt{\frac{ab}{a+b} m \lambda},$$

де $m = 1, 2, 3, \dots$; a – відстань від джерела до діафрагми, b – відстань від діафрагми до екрана спостереження.

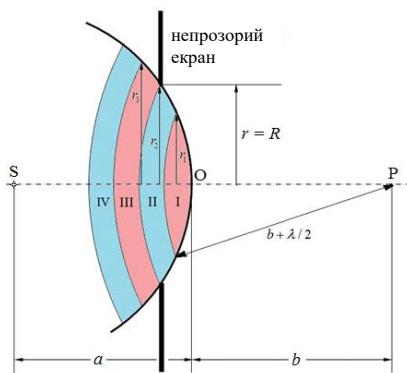


Рисунок 15.4

Дифракція Фраунгофера – дифракція від плоского фронту хвилі.

Умова спостереження мінімумів при дифракції від однієї щілини, ширина якої b :

$$b \sin \varphi = 2m \cdot \lambda / 2, \quad (m = 1, 2, 3 \dots).$$

Дифракційна ґратка – система періодично повторюваних неоднорідностей (щілин, штрихів).

Період ґратки – відстань d між осями двох сусідніх щілин. Якщо на ширині ґратки $l \in N$ щілин, то $d = l / N$.

Дифракційна ґратка дає картину багатопроменевої інтерференції, тому умова головних дифракційних максимумів від дифракційної ґратки співпадає з умовою інтерференційних максимумів

$$d \sin \varphi = m \lambda, \quad (m = 1, 2, 3 \dots).$$

Кутова дисперсія ґратки визначає кут $d\varphi$ між максимумами одного порядку двох хвиль, довжини яких відрізняються на $d\lambda$

$$D_{\varphi} = \frac{d\varphi}{d\lambda}; \quad \text{або} \quad D_{\varphi} = \frac{m}{d}.$$

Роздільна здатність дифракційної ґратки визначає інтервал $\delta\lambda$, у якому дві близькі довжини хвиль спектра λ_1 та λ_2

сприймаються як окремі лінії: $R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = mN$, де N – загальна кількість щілин ґратки, на які попадає світло.

Поляризованим називається світло, у якому напрямок коливань світлового вектора певним чином упорядкований. Площина, в якій відбуваються коливання світлового вектора $\vec{E}$, називається **площиною поляризації**. Розрізняють три типи поляризованого світла. **Еліптично поляризоване світло**: світловий вектор $\vec{E}$ змінюється так, що його кінець описує еліпс, що лежить у площині, перпендикулярній променю. Якщо еліпс поляризації вироджується в пряму (при різниці фаз φ рівній нулю або π), то світло буде **плоскополяризованим**, а якщо в коло (при $\varphi = \pm\pi/2$ і рівності амплітуд хвиль, що додаються), то світло буде **поляризованим по колу**.

Ступінь поляризації – це величина $P = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}$, де $I_{\max}$ і

$I_{\min}$ – максимальна та мінімальна інтенсивності світла, які відповідають двом взаємно перпендикулярним компонентам вектора $\vec{E}$. Для природного світла $I_{\max} = I_{\min}$ і $P = 0$, для плоскополяризованого $I_{\min} = 0$ і $P = 1$.

Поляризатор – прилад, що здатний природне світло перетворювати у поляризоване. Площина, в якій, після поляризатора, коливається вектор $\vec{E}$, називається **головною площиною**. Інтенсивність природного світла $I_{\text{пр}}$ після проходження крізь поляризатор, зменшується $I_0 = 0,5 I_{\text{пр}}$.

Аналізатор – поляризатор, призначення якого відрізнити природне світло від поляризованого.

Закон Малюса: інтенсивність поляризованого світла I , що вийшло з аналізатора $I = I_0 \cos^2 \alpha$, де I_0 – інтенсивність поляризованого світла, що падає на аналізатор; α – кут між головними площинами поляризатора і аналізатора.

При падінні світла на поверхню діелектрика під **кутом Брюстера** i_b , який задовольняє співвідношення $\text{tg} i_b = n_{21}$, відбитий промінь є плоскополяризованим, – він містить тільки

коливання, перпендикулярні до площини падіння. В рівнянні Брюстера n_{21} – відносний показник заломлення другого середовища, щодо першого. Заломлений промінь при куті падіння i_b поляризується максимально, але не повністю.

Закон Брюстера: відбите від діелектрика світло є поляризованим, якщо $i_b + \beta = \pi/2$, де β – кут заломлення.

Закон Бугера: інтенсивність світла I , що пройшло крізь шар речовини товщиною d , зменшується експоненціально $I = I_0 e^{-\gamma d}$, де I_0 – інтенсивність падаючого світла, γ – коефіцієнт поглинання середовища.

Дисперсія – сукупність оптичних явищ, пов'язаних із залежністю показника заломлення від довжини хвилі падаючого світла $n = f(\lambda)$ (або залежність фазової швидкості від частоти). Завдяки цьому явищу біле світло, що падає на призму, розкладається у веселку.

15.2 Завдання по темі

Умова 15.1. Інтерференційна картина спостерігається на екрані, що відстоїть на $l = 70$ см від екрана зі щілинами Юнга, відстань між якими $d = 1$ мм. Спостереження ведеться у жовтому світлі $\lambda = 630$ нм.

Знайти:

1. Оптичну різницю ходу променів, що утворюють:
а) 2-ий максимум, б) 3-ій мінімум.
2. Положення 2-го інтерференційного максимуму.
3. Ширину інтерференційних смуг.
4. У скільки разів зміниться ширина інтерференційних смуг, якщо спостерігати через синій світлофільтр з $\lambda = 460$ нм?

Умова 15.2. Тонка діелектрична плівка з показником заломлення $n = 1,33$ нанесена на підкладку з показником заломлення а) $n_0 = 1,30$; б) $n_0 = 1,40$. На плівку з повітря падає біле світло під кутом $\alpha = 30^\circ$; 45° ; 60° .

Знайти:

1. Формулу залежності оптичної різниці ходу променів Δ від товщини плівки h при спостереженні у а) прохідному; б) відбитому світлі.

2. Мінімальну товщину плівки, якщо вона забарвлена а) у червоний колір $\lambda = 700$ нм; б) у зелений колір $\lambda = 550$ нм. Спостереження ведеться згідно з варіантом, обраним у п. 1.

Умова 15.3. Внаслідок стікання мильної плівки утворюється клин. Кут клина $\gamma = 20''$. Біле світло падає на плівку нормально. У результаті інтерференції на поверхні плівки спостерігаються райдужні смуги, що чергуються. Подальші дослідження проводили:

а) за відбитим світлом крізь зелений світлофільтр $\lambda = 550$ нм; б) за прохідним світлом крізь жовтий світлофільтр $\lambda = 620$ нм

Знайти:

1. Різницю ходу променів між двома сусідніми темними смугами.

2. Ширину інтерференційних смуг, які спостерігаються на поверхні плівки.

3. Кількість темних смуг на 2 см плівки.

Умова 15.4. Дифракційна ґратка має 100 штрихів на 1 мм довжини.

Знайти:

1. Постійну d дифракційної ґратки.

2. Кут φ , під яким спостерігається 2-ий максимум, що відповідає червоній лінії з $\lambda = 650$ нм.

3. Кількість максимумів, яку дасть ця дифракційна ґратка у жовтому кольорі з $\lambda = 630$ нм.

4. Кут $\Delta\varphi$ між максимумами 1-го порядку, що спостерігаються у зеленому кольорі з $\lambda = 550$ нм.

5. Кутову ширину видимого спектра (від 350 нм до 700 нм) в 1-ому порядку.

6. Кутову дисперсію для $\lambda = 560$ нм у спектрі 2-го порядку.

7. Фокусну відстань, яку повинна мати лінза, що проектує спектр на екран, щоб відстань між лініями калію $\lambda_1 = 404,4$ нм і $\lambda_2 = 404,7$ нм у спектрі першого порядку була рівною $\Delta l = 0,1$ мм.

Умова 15.5. Інтенсивність природного світла 100 кд. Світло проходить спочатку через один поляризатор, потім через другий. Коефіцієнт поглинання й відбивання поляризаторів

а) $k = 0$; б) $k = 0,10$.

Знайти:

1. Інтенсивність світла, що пройшла крізь поляризатор.
2. Інтенсивність світла, що пройшла крізь аналізатор, якщо кут між площинами поляризаторів $\alpha = 30, 45, 60^\circ$.

Завдання даної теми розв'язують строго за визначеннями і алгоритмів не потребують.

Тема 16. КВАНТОВА ОПТИКА

16.1 Основні теоретичні положення

Теплове випромінювання – випромінювання нагрітими тілами електромагнітних хвиль за рахунок внутрішньої енергії. Рівноважне випромінювання: при незмінній температурі тіла і навколишнього середовища кількість енергії, що випромінюється дорівнює кількості енергії, що поглинається.

Випромінювальність (енергетична світність) – енергія, що випромінюється одиницею поверхні в одиницю часу в усіх напрямках: $R = \frac{W}{\Delta S \Delta t}$, де W – повна енергія випромінювання.

Тобто R – об'ємна густина енергії випромінювання.

Спектральна випромінювальність (випромінювальна здатність) – випромінювальність в одиничному інтервалі частоти

$r_{\omega,T} = \frac{dR_T}{d\omega}$. Отже, $R_T = \int_0^{\infty} r_{\omega,T} d\omega$ і має назву **інтегральна**

випромінювальна здатність.

Поглинальна здатність – відношення кількості енергії $\Delta\Phi'$, поглиненої тілом за даної температури, до енергії $\Delta\Phi$ падаючого потоку:

$$a_{\omega,T} = \frac{\Delta\Phi'}{\Delta\Phi}.$$

Абсолютно чорне тіло поглинає всю падаючу на нього енергію, тобто $a_{\omega,T}=1$. Моделлю абсолютно чорного тіла є малий отвір у замкненій порожнині із дзеркальними стінками.

Закон Кірхгофа: відношення випромінювальної і поглинальної здатностей не залежить від природи тіла, воно є для всіх тіл універсальною функцією частоти й температури (випромінювальною здатністю абсолютно чорного тіла):

$$\frac{r_{\omega,T}}{a_{\omega,T}} = f(\omega,T) = \frac{2\pi c}{\omega^2} \varphi(\lambda,T).$$

Закон Стефана-Больцмана: $R = k\sigma T^4$, де k – ступінь чорноти; $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт м}^{-2} \text{ К}^{-4}$ – стала Стефана-Больцмана.

Для абсолютно чорного тіла $R^* = \sigma T^4$.

Закон зміщення Віна: довжина хвилі λ_m , що відповідає максимуму спектральної випромінювальності абсолютно чорного тіла, пов'язана з температурою тіла співвідношенням $\lambda_m T = b$, де $b = 2,9 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{К}$ – стала Віна.

Гіпотеза Планка: тіла випромінюють енергію не неперервно, а у вигляді окремих порцій. Енергія кожної такої порції – кванта випромінювання (фотона) – пропорційна його частоті ν :

$\mathcal{E} = h\nu$, де $h = 6,625 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$ – стала Планка;

або $\mathcal{E} = \hbar\omega$, де ω – циклічна частота, $\hbar = 1,05 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$.

Фотон – порція енергії електромагнітної хвилі; частинка, що немає маси спокою; рухається у напрямку поширення хвилі зі швидкістю світла $c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$ і має імпульс $p = \frac{h}{\lambda}$.

Формула Планка визначає вид функції Кірхгофа:

$$f(\omega, T) = \frac{\hbar\omega^3}{4\pi^2 c^2} \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1}.$$

Зовнішній фотоефект – явище виривання електронів з поверхні металу під дією світла.

Закони Столетова:

1. Фотострум насичення I_s (максимальне число електронів, що вивільняються випромінюванням за 1 с) прямо пропорційний світловому потоку, що падає на катод.

2. Максимальна початкова швидкість фотоелектронів v_m визначається частотою ν падаючого світла та не залежить від його інтенсивності.

3. Для кожного металу існує своя мінімальна частота ν_o , менше якої випромінювання довільної інтенсивності не викликає фотоефекта (червона межа фотоефекта).

Формула Ейнштейна для фотоефекта: $h\nu = A_{\text{вих}} + \frac{m\nu_m^2}{2}$,

де $h\nu$ – енергія падаючого на метал фотона, $A_{\text{вих}}$ – робота виходу електрона з металу (таблична величина) $A_{\text{вих}} = h\nu_o = \frac{hc}{\lambda_o}$; де

ν_o і λ_o – червона межа фотоефекта – мінімальна частота випромінювання, за якої починається фотоефект, і максимальна довжина хвилі, при якій ще спостерігається фотоефект, відповідно.

Кінетична енергія фотоелектрона визначається роботою затримуючого електричного поля: $\frac{m\nu_m^2}{2} = eU_{\text{затр}}$, де $U_{\text{затр}}$ – затримуючий потенціал.

Ефект Комптона: при розсіюванні Х-променів¹⁴ з довжиною хвилі λ деякими речовинами (валентні електрони яких слабо зв'язані з ядром) у залежності від кута розсіювання θ відбувається помітна зміна довжини хвилі на $\Delta\lambda$:

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos\theta).$$

Світловий тиск: $p = w(1 + \rho) = \frac{W}{c}(1 + \rho)$, де ρ – коефіцієнт відбивання, w – об'ємна густина енергії випромінювання. $W = N h\nu$ – енергія всіх фотонів, c – швидкість світла.

16.2 Завдання по темі

Умова 16.1. Електрична лампочка, потужністю 100 Вт, включена в електричне коло. Спіраллю лампи є вольфрамовий циліндр, діаметром 1 мм і довжиною 4 см, ступінь чорноти якого $k = 0,7$.

Знайти:

1. Енергетичну світність (випромінювальність) лампи.

¹⁴ Сучасна наукова назва рентгенівського випромінювання

2. Температуру спіралі лампи.
3. Довжину хвилі λ_m , яка відповідає максимуму спектральної випромінювальності.

При вимиканні струму температура лампи знижується за законом:

$$\text{а) } T = 300 + T_0 e^{-0,02t}; \quad \text{б) } T = 293 + (T_0 - 293)t^{-1/2}.$$

Знайти:

4. Час t_1 , за який λ_m збільшиться вдвічі.
5. Кількість енергії, яка виділиться у процесі вистигання за час $t_2 = 3 t_1$?

Умова 16.2. Поверхня а) калію; б) літію; в) натрію опромінюється світлом довжиною хвилі $\lambda = 350$ нм.

Знайти:

1. Червону межу фотоефекта для даного металу. (Робота виходу : $A_K = 2,0$ еВ; $A_{Li} = 2,4$ еВ; $A_{Na} = 2,3$ еВ.)
2. Кінетичну енергію електронів, вирваних з поверхні металу.
3. Максимальну швидкість фотоелектронів.
4. Затримуючу різницю потенціалів.
5. У скільки разів зміниться затримуюча різниця потенціалів, якщо довжина хвилі випромінювання, що падає на поверхню, зменшиться на 50 нм.

Умова 16.3. На розсіювач з парафіну падає Х-випромінювання з довжиною хвилі $\lambda = 60$ пм.

Знайти:

1. Енергію та імпульс падаючих на парафін фотонів.
2. На скільки зміниться довжина хвилі випромінювання при розсіюванні випромінювання на $\theta = 60^\circ, 90^\circ, 120^\circ$.
3. Енергію розсіяного фотона.
4. Кінетичну енергію електрона віддачі.
5. Імпульс електрона віддачі і його напрямок.
6. Енергію фотона, що перейшла до електрона віддачі.

Рекомендації при розв'язуванні п.5 умови 16.1

За визначенням і з урахуванням закону Стефана-Больцмана, кількість енергії, що випромінюється тілом:

$$dW = k\sigma T^4 dS dt, \text{ тоді } W = \int_{(S)} \int_0^t k\sigma T^4 dS dt. \text{ З урахуванням}$$

функціональної залежності $T(t)$: $W = k\sigma S \int_0^t T(t)^4 dt$.

Наприклад, інтеграл для функціональної залежності варіанта а):

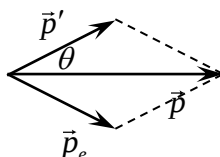
$$\int (a + be^{-ct})^4 dt = a^4 t - 4 \frac{a^3 b e^{-ct}}{c} - 3 \frac{a^2 b^2 (e^{-ct})^2}{c} - 4/3 \frac{a b^3 (e^{-ct})^3}{c} - 1/4 \frac{b^4 (e^{-ct})^4}{c} + Const$$

Якщо підставити межі інтегрування, то можна визначити чисельне значення, але слід визнати, що розрахунки досить складні. Однак, є інший варіант розв'язку, і він можливий тільки тому, що теплове випромінювання є рівноважним процесом. Якщо в початковий момент часу випромінюється енергія W_1 , а через час t – W_2 , то за законом збереження енергії, тіло випромінює енергію $\Delta W = (W_1 - W_2)$. Тоді $\Delta W = k\sigma S t_2 (T_1^4 - T_2^4)$.

Рекомендації при розв'язуванні п.5 умови 16.3

Зверніть увагу саме на те, що в явищі Комптона виконується закон збереження імпульсу, а імпульс є величина векторна: $\vec{p} = \vec{p}' + \vec{p}_e$, де $\vec{p}_e$ – імпульс електрона, $\vec{p}$ – імпульс фотона до взаємодії з електроном, $\vec{p}'$ – після. Чисельне значення p_e визначається за законом косинусів:

$$p_e = \sqrt{p'^2 + p^2 + 2p' \cdot p \cdot \cos \theta}.$$



Тема 17. КВАНТОВА МЕХАНІКА. НАЙПРОСТІШІ ВИПАДКИ РУХУ МІКРОЧАСТИНОК

17.1 Основні теоретичні положення

Гіпотеза де Бройля: частинки речовини, що мають енергію E і імпульс p , поряд з корпускулярними властивостями мають хвильові властивості, що характеризуються параметром, який називається **довжина хвилі де Бройля**:

$$\lambda = \frac{h}{p} \quad (\text{у класичному наближенні});$$

$$\lambda = \frac{h}{mv} \sqrt{1 - v^2/c^2} \quad \text{або} \quad \lambda = \frac{hc}{\sqrt{E^2 - (mc^2)^2}} \quad (\text{у релятивістському}$$

наближенні).

Принцип невизначеностей Гейзенберга: у квантовій механіці існують пари величин, точність визначення однієї з яких, пов'язана з точністю визначення іншої. Такі величини називаються спряженими. Наприклад, при зменшенні області локалізації частинки в просторі Δx , збільшується невизначеність у величині її імпульсу Δp :

$$\Delta p \cdot \Delta x \geq \hbar ;$$

або: визначення енергії частинки з точністю до ΔE потребує часового інтервалу Δt : $\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar$.

Хвильова функція (псі-функція) $\Psi = Ae^{\frac{i}{\hbar}(px - Et)}$ – описує хвильові властивості мікрочастинки (амплітуда ймовірності). Фізичний зміст має $|\Psi|^2$ – густина ймовірності знаходження електрона у певній області простору.

Псі-функція, у якої чисельно відомо значення A , називається нормованою.

$$\text{Умова нормованої псі-функції} \quad \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi|^2 dV = 1.$$

$$\text{Ймовірність виявити частинку в об'ємі } V: W = \int_V |\Psi|^2 dV .$$

Рівняння Шредінгера (динамічне рівняння для хвильових частинок): $-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi + U\Psi = i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}$. Тут Δ – лапласіан; U – потенціальна енергія частинки у силовому консервативному полі; $i = \sqrt{-1}$.

Так як консервативні поля не залежать від часу, а хвильову функцію можна розкласти на складові $\Psi = Ae^{\frac{i}{\hbar}px}e^{-\frac{i}{\hbar}Et} = \psi(r)\psi(t)$, то для знаходження хвильової функції переходимо до **стаціонарного рівняння Шредінгера**:

$$\Delta\psi + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U)\psi = 0.$$

Нормована хвильова функція дозволяє визначати усереднені характеристики хвильових частинок, наприклад:

$$\text{усереднена енергія: } \langle E \rangle = \int \psi^* E \psi dV,$$

$$\text{усереднена координата хвильової частинки } \langle r \rangle = \int_V \psi^* r \psi dV.$$

Тут $\psi^* = Ae^{-\frac{i}{\hbar}(px - Et)}$ – називається хвильовою функцією спряжена.

Одномірне рівняння Шредінгера для стаціонарних станів: $\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U)\psi = 0$, де $U = U(x)$ – потенціальна енергія силового поля, у якому перебуває хвильова частинка, що рухається у напрямку x .

Розв'язок даного рівняння для частинки, що перебуває в одномірній потенціальній ямі шириною l і нескінченно високими стінками (потенціальна енергія на стінках ями нескінченно велика), має вигляд $\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{\pi n}{l} x$ і існує тільки за умови квантування енергії:

$$E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2} n^2,$$

де $n = 1, 2, 3, \dots$

Тунельний ефект: розв'язок рівняння Шредінгера має місце навіть для випадку, якщо потенціальна енергія більше за повну енергію частинки $U > E$. Це означає, що:

1. Існує ймовірність знайти частинку за межами потенціального бар'єра для випадку його кінцевих розмірів;
2. Існує ймовірність знайти частинку усередині нескінченного потенціального бар'єра.

Можливий також зворотний ефект: при $U < E$ існує ймовірність відбивання хвильових частинок від низького потенціального бар'єра.

Коефіцієнт заломлення хвиль де Бройля на межі низького потенціального бар'єра нескінченної ширини:

$$n = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{k_2}{k_1}, \text{ де хвильові числа } k_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \text{ й } k_2 = \frac{\sqrt{2m(E-U)}}{\hbar}.$$

Коефіцієнт відбивання ρ і пропускання τ хвиль де Бройля крізь низький потенціальний бар'єр нескінченної ширини:

$$\rho = \left| \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \right|^2, \quad \tau = \frac{4k_1 k_2}{(k_1 + k_2)^2}.$$

Коефіцієнт прозорості прямокутного потенціального бар'єра шириною d (ймовірність проходження крізь бар'єр)

$$W \approx \exp \left[-\frac{2d}{\hbar} \sqrt{2m(U-E)} \right].$$

17.2 Завдання по темі

Умова 17.1. Електрон перебуває в одновимірній потенціальній ямі з нескінченно високими стінками, ширина якої $l = 5$ нм.

1. Використовуючи співвідношення невизначеностей, записати вираз, що дозволяє оцінити мінімальну енергію електрона.

2. Вивести формулу залежності довжини хвилі де Бройля від номера енергетичного рівня, на якому перебуває електрон.

3. Зобразити графічно перші три власних функцій $\psi_n(x)$, що описують стан електрона, а також $|\psi_n(x)|^2$.

4. У яких точках усередині ями густина ймовірності $|\psi_n(x)|^2$ знаходження частинки максимальна (мінімальна), якщо електрон перебуває на $n = 2$ (3 або 4) енергетичному рівні?

5. У яких точках густина ймовірності електрона на першому і другому енергетичних рівнях однакова? Обчислити густину ймовірності для цих точок. Розв'язок пояснити графічно.

6. Яка ймовірність перебування частинки:

а) у середній третині ями;

б) у крайній третині ями;

в) у крайній чверті ями;

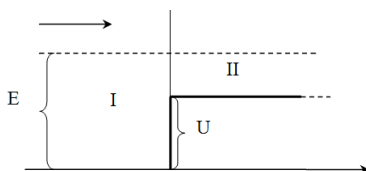
г) в інтервалі $\frac{1}{4}l$, рівновіддаленому від стінок ями;

якщо вона перебуває а) в основному стані; б) у першому збудженому.

7. Визначити найменшу різницю енергетичних рівнів $\Delta E_{n,n+1}$.

8. Знайти вираз для відношення різниці сусідніх енергетичних рівнів $\Delta E_{n,n+1}$ до енергії частинки E_n . Проаналізуйте, чи є суттєвим квантування енергетичних рівнів для даного електрона (за яких n квантуванням можна знехтувати, якщо відомо, що відношення повинне бути не більше 0,01? чи реалізується такий стан?). Провести аналогічний аналіз для молекули кисню за нормальних умов, якщо $l \sim 10$ см.

Умова 17.2. Електрон з енергією $E = 25$ еВ зустрічає на своєму шляху потенціальний бар'єр нескінченної ширини висотою $U = 9$ еВ.



Знайти:

1. Довжину хвилі де Бройля електрона в області I і II.
2. Коефіцієнт заломлення n хвиль де Бройля на границі потенціального бар'єру.
3. Коефіцієнт відбивання ρ (ймовірність відбивання електрона від потенціального бар'єру).
4. Коефіцієнт пропускання τ (ймовірність пропускання над бар'єром).
5. Вивести формулу, що зв'язує коефіцієнт пропускання τ крізь потенціальний бар'єр і коефіцієнт заломлення n хвиль де Бройля.
6. Визначити, для даної енергії E , значення потенціальної енергії U_1 , за якої коефіцієнт відбивання ρ дорівнює коефіцієнту пропускання τ .

Умова 17.3. Електрон рухається зі швидкістю $v = 5 \cdot 10^6$ м/с та попадає на потенціальний бар'єр висотою $U = 72$ еВ і шириною $d = 0,5$ нм.

Знайти:

1. Енергію електрона.
2. Ймовірність проходження електрона крізь потенціальний бар'єр.
3. У скільки разів зміниться ймовірність проходження крізь потенціальний бар'єр, якщо швидкість електрона зменшити у 1,05 разів?
4. У скільки разів зміниться ймовірність проходження електрона крізь потенціальний бар'єр, якщо висота бар'єра зменшиться на 0,5 еВ?

Приклад розв'язування умови 17.1 п.6

Визначити густину ймовірності електрона в потенціальній ямі шириною l в інтервалі $0 \leq x \leq \frac{1}{4} l$. Електрон перебуває у першому збудженому стані.

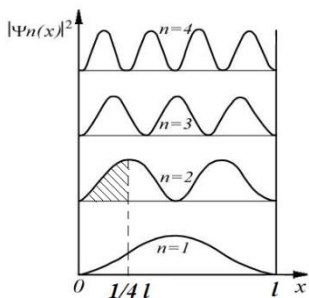
За визначенням $W = \int_V |\psi|^2 dV$. Псі-функція електрона у

потенціальній ямі $\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{\pi n}{l} x$, де для збудженого стану

$$n = 2. \text{ У такому випадку } W = \int_V |\psi|^2 dV = \frac{2}{l} \int_0^{0,25l} \sin^2 \frac{2\pi x}{l} dx.$$

Перетворимо $\sin^2 \frac{2\pi x}{l} = \frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{4\pi x}{l} \right)$ і інтегруємо:

$$W = \frac{2}{l} \left[\int_0^{0,25l} \frac{dx}{2} - \int_0^{0,25l} \cos \frac{4\pi x}{l} dx \right] = 0,25 - \frac{1}{2\pi} \sin \frac{4\pi x}{l} \Big|_0^{0,25l} = 0,25.$$



Наочно відповідь представлена заштрихованою площею на рисунку розподілу густини ймовірності по ширині потенціальної ями з нескінченно високими стінками.

Відповідь: $W = 0,25$.

Тема 18. КВАНТОВА МЕХАНІКА. БУДОВА АТОМА. СПЕКТРИ

18.1 Основні теоретичні положення

Постулати Бору (напівкласична теорія атома водню):

1. Атомна система може перебувати тільки в особливих стаціонарних або квантових станах, кожному з яких відповідає певна енергія E_n . У стаціонарному стані атом енергію не випромінює.

Правило квантування орбіт: у стаціонарному стані електрон в атомі, рухаючись по коловій орбіті, повинен мати квантоване значення моменту імпульсу:

$$m_e v_n r_n = n \hbar, \text{ де } n = 1, 2, 3, \dots$$

Радіус орбіт квантован і дорівнює $r_n = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{m_e e^2} n^2 = r_0 n^2$, де

стала $r_0 = 0,529$ пм називається борівський радіус атома водню.

2. При переході атома з одного стаціонарного стану в інше випромінюється або поглинається квант електромагнітного випромінювання. Енергія фотона дорівнює різниці енергій атома у двох стаціонарних станах

$$\hbar \omega = E_m - E_n, \text{ де } \hbar - \text{постійна Планка.}$$

Стан з мінімальною енергією називається основним, інші – збуджені. Час життя атомів у збуджених станах здебільшого не перевищує $10^{-8} \div 10^{-7}$ с.

Енергія електрона в атомі за теорією Бору:

$$E_n = - \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{m_e e^4}{2 \hbar^2} \frac{1}{n^2},$$

де n – квантове число, що набуває значень $n = 1, 2, 3, \dots$;

m_e – маса електрона;

e – заряд електрона;

ϵ_0 – електрична стала.

Серіальна формула (узагальнена формула Бальмера) визначає частоту випромінювання спектральних ліній атомів:

$$\omega = R \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right),$$

де $R = 2,07 \cdot 10^{16} \text{ рад} \cdot \text{с}^{-1}$ – стала Рідберга;

n – рівень, на який переходить електрон зі збудженого стану, квантове число якого m .

Для видимого діапазону спектра (серія Бальмера) $n = 2$:

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{m^2} \right),$$

де λ – довжина хвилі випромінювання,

$R' = 1,097 \cdot 10^7 \text{ м}^{-1}$ – стала Рідберга для довжин хвиль.

На рис. 18.1 показані можливі переходи електрона з рівня на рівень. Вони утворюють серії – сукупність ліній, об'єднаних номером рівня, на який відбувається перехід з більш високих енергетичних станів. На рисунку УФ – ультрафіолетова область випромінювань, ІЧ – інфрачервоне випромінювання.



Рисунок 18.1

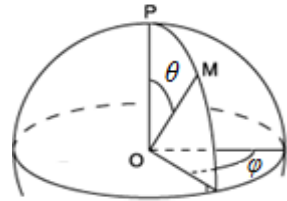


Рисунок 18.2

Рівняння Шредінгера для атома водню:

$$\Delta \psi + \frac{2m}{\hbar^2} \left(E + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right) \psi = 0,$$

Його розв'язок $\psi = R(r) \Theta(\theta) \Phi(\varphi)$ представлений трьома незалежними просторовими координатами в сферичній системі (рис. 18.2): r – радіус сфери, θ – полярна координата, φ – азимутальна координата.

Кожна з функцій квантована, тобто залежить від деякого цілого числа, яке називається квантовим.

$R(r)$ – радіальна частина визначається головним квантовим числом n , що набуває значень $n = 1, 2, 3, \dots$. Головне квантове число визначає **енергію електрона**

$$E_n = - \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{m_e e^4}{2\hbar^2} \frac{1}{n^2}.$$

$\Theta(\theta)$ – полярна частина визначається орбітальним квантовим числом l , що набуває значень $l = 0, 1, \dots, (n-1)$. У свою чергу l визначає **момент імпульсу** електронної хвилі в атомі $L = \hbar\sqrt{l(l+1)}$. Квантовим числам l присвоєні символи s, p, d, f, g від 0 і далі.

$\Phi(\varphi)$ – азимутальна частина, визначається магнітним квантовим числом m_l , що набувають значень $m_l = 0, \pm 1, \dots, \pm l$. У свою чергу m_l визначає **проекцію моменту імпульсу** на напрямок зовнішнього магнітного поля $L_z = \hbar m_l$.

Псі-функція основного стану електрона в атомі водню $\psi_{100} = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} e^{-r/a}$, де $a = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{me^2}$ – величина, що збігається з борівським радіусом r_0 . Індекс 100 означає квантові числа $n = 1$, $l = 0$, $m_l = 0$, форма електронної хмари – сфера, густина ймовірності якої максимальна при $r = a$.

Густина ймовірності електронної хвилі у сферичному шарі dr на відстані r від центру, де знаходиться ядро:

$$dP = \frac{1}{\pi a^3} e^{-2r/a} 4\pi r^2 dr.$$

Спін електрона (s) – внутрішня властивість квантової частинки, що характеризує її так само, як маса і заряд. Класичного аналога немає. Спінове квантове число набуває значення $s = \frac{1}{2}$, воно визначає спіновий момент імпульсу електрона $L_s = \hbar\sqrt{s(s+1)} = \frac{\hbar}{2}\sqrt{3}$. Проекцію спінового моменту імпульсу на напрямок зовнішнього магнітного поля визначає

число $m_s = \pm 1/2$, тоді $L_{sz} = \pm \frac{1}{2} \hbar$. Спіном пояснюються дублети в атомних спектрах.

Сукупність квантових чисел n, l, m_l визначає конфігурацію електронної хмари. Спін s відмінності в енергетичний стан не вносить. Кратність виродження енергетичного рівня (число станів з однаковою енергією, або число незалежних розв'язків рівняння Шредінгера):

$$\sum_0^{n-1} (2l+1) = n^2.$$

Магнітний момент електрона в атомі μ_L пов'язаний з механічним моментом електрона L гіромагнітним співвідношенням $\frac{\mu_L}{L} = \frac{e}{2m_e}$, де e – заряд, m_e – маса електрона. А

це означає, що магнітний момент електрона в атомі також є квантованим, як і механічний момент: $\mu_L = \mu_B \sqrt{l(l+1)}$,

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} = 9,27 \cdot 10^{-24} \text{ ДжТл}^{-1} \text{ – магнетон Бору.}$$

Проекція магнітного моменту на напрямок зовнішнього магнітного поля $\mu_z = \mu_B m_l$.

Квантування магнітного моменту підтверджується розщепленням енергетичних рівнів на триплети (три дуже близькі спектральні лінії).

Правила відбору – припустимими (з максимальною ймовірністю) будуть переходи електрона з рівня на рівень, якщо зміни квантових чисел відповідають $\Delta l = \pm 1$ і $\Delta m_l = 0$, або ± 1 .

Принцип Паулі: у будь-якому квантовому стані, який описується квантовими числами n, l, m_l, s може перебувати тільки один електрон. Згідно з цим принципом в атомі лише 2 електрони мають однакові m_l (різні s), лише $2(2l+1)$ електронів мають однакові l (різні m_l і s) та $2n^2$ електронів – однакові n . Сукупність електронів, які мають однакову n , утворюють оболонку, а електрони з однаковим l – утворюють підоболонку.

18.2 Завдання по темі

Умова 18.1. Атом водню перебуває в основному стані, який описується власною хвильовою функцією $\psi(r) = Ce^{-r/a}$.

1. Знайти з умови нормування постійну C .
2. Визначити відстань, на якій ймовірність знаходження електрона максимальна.
3. Визначити середню відстань $\langle r \rangle$ електрона від ядра.
4. Визначити відношення ймовірностей перебування електрона в сферичних шарах товщиною $\Delta r = 0,01a$ і радіусами $r_1 = 0,5a$ та $r_2 = 1,5a$.
5. Обчислити ймовірність того, що електрон перебуває усередині області, що обмежена сферою радіуса, рівного борівському радіусу.
6. Обчислити ймовірність того, що електрон перебуває поза областю, що обмежена сферою радіуса, рівного борівському радіусу.

Умова 18.2. Електрон в атомі водню.

1. Визначити енергію перших чотирьох енергетичних рівнів. Накреслити схему рівнів і підрівнів (відмінність по орбітальних квантових числах) і позначити на ній всі можливі переходи.
2. Визначити найбільшу (найменшу) довжину хвилі випромінювання у серії Лаймана (Бальмера, Пашена).
3. Якщо, при збудженні атома, в спектрі спостерігаються тільки три лінії, то яким переходам вони відповідають? Знайти довжини хвиль цих спектральних ліній.
4. Визначити перший потенціал збудження атома.
5. Як змінився момент імпульсу електрона, якщо:
 - а) в основному стані електрон поглинув фотон з енергією 10,3 еВ;
 - б) перебуваючи в р-стані, електрон поглинув фотон з енергією 1,89 еВ;

в) електрон перебував на 3-ому енергетичному рівні і перейшов в основний стан (врахуйте правила відбору).

6. Скільки різних станів може бути в електрона при $n = 2$, (3; 4) ?

7. Чому дорівнює максимальне значення проекції моменту імпульсу електрона у р-стані (d-, f- стані)? Знайти кут між моментом імпульсу електрона і зовнішнім магнітним полем.

Завдання 18.3-1. Знайти кількість електронів в атомах, у яких в основному стані заповнені:

а) К- і L- шари, 3s-оболонка й половина 3p- оболонки;

б) К-, L- і М- шари й 4s- і половин 4p- оболонки;

в) К-, L- і М- шари й 4s-, 4p- і 4d- оболонки.

Які це атоми?

Завдання 18.3-2. Записати формули електронної будови атомів, порядковий номер Z яких даний у таблиці варіантів.

Рекомендації при роботі над завданням по темі

При розв'язуванні питань 1 і 3 буде корисною наступна

інформація: $\int_0^{\infty} x^n e^{-ax} dx = \frac{n!}{a^{n+1}}$

У п.2 досліджуйте функцію ймовірності на екстремум, тобто візьміть похідну по змінній r і прирівняйте її до 0.

У п.4 можна припустити, що ширина шару Δr настільки мала, що ймовірність є постійною величиною, таким чином

$$\Delta P = \frac{1}{\pi a^3} e^{-2r/a} 4\pi r^2 \Delta r .$$

При розв'язку п.5 і п.6 візьміть визначений інтеграл шляхом поділу змінних зі зниженням ступеня; причому в п.6 можна використовувати умову нормування (повна ймовірність достовірної події рівна 1).

Тема 19. КВАНТОВІ СТАТИСТИКИ. ЕЛЕМЕНТИ ФІЗИКИ ТВЕРДОГО ТІЛА

19.1 Основні теоретичні положення

Описати системи, що утворені величезною кількістю квантових частинок, можливо лише статистичними методами.

Квантова статистика ґрунтується на **принципі нерозрізненості тотожних частинок**, причому для частинок із цілим і півцілим спіном функції розподілу повинні бути різні, тому що тип симетрії хвильових функцій визначає кількість різних станів. Отже, існує дві квантові статистики: **Фермі-Дірака** для часток з півцілим спіном (псі-функції яких антисиметричні¹⁵) – частинки називаються **ферміонами** і **Бозе-Ейнштейна** для частинок із цілим спіном, у тому числі й нульовим (псі-функції яких симетричні¹⁶) – частинки називаються **бозонами**.

Система квантових частинок визначається кількістю частинок у кожному енергетичному стані $N_1, N_2, \dots, N_n, \dots$, які називають **числами заповнення стану**.

Середнє число заповнення:

$$\langle N_n \rangle = \sum N_n f(E) = \frac{\sum N_n e^{-\frac{E}{kT}}}{\sum e^{-\frac{E}{kT}}} \quad (19.1)$$

визначає кількість частинок, які можуть перебувати у стані з енергією E_n .

Можливі два варіанти:

$$N_1 + N_2 + \dots + N_n + \dots = N \quad (19.2)$$

$$N_1 + N_2 + \dots + N_n + \dots = 0 \text{ або } 1 \quad (19.3)$$

¹⁵ Для системи з двох частинок $\Psi_{as}(r_1, r_2) = \psi_I(r_1)\psi_{II}(r_2) - \psi_{II}(r_1)\psi_I(r_2)$, у цьому випадку заборонений стан з $\psi_I(r_1) = \psi_{II}(r_2)$, тому що при перестановці частинок $\Psi(r_1, r_2) \equiv 0$. Звідси випливає принцип Паулі

¹⁶ Для системи з двох частинок $\Psi_s(r_1, r_2) = \psi_I(r_1)\psi_{II}(r_2) + \psi_{II}(r_1)\psi_I(r_2)$

Рівняння (19.2) передбачає енергетичний стан, в якому перебувають всі частинки разом. Рівняння (19.3) – відповідає принципу Паулі (у даному енергетичному стані не більше однієї частинки).

Функція розподілу Бозе-Ейнштейна отримана із рівняння (19.1) з урахуванням (19.2):

$$f_B(E) = \frac{1}{e^{\frac{E-\mu}{kT}} - 1},$$

де μ – хімічний потенціал – визначає, як змінюється розподіл частинок при додаванні до них ще однієї. $\mu \leq 0$, тому що в іншому випадку при $E < \mu$ середнє число заповнення $\langle N(E) \rangle$ виявилось б від’ємним. Для системи з нефіксованим числом частинок, які з’являються і зникають (фотони, фоони) $\mu = 0$.

Функція розподілу Фермі-Дірака при $T = 0$ отримана з рівняння (19.1) з урахуванням (19.3):

$$f_F(E) = \frac{1}{e^{\frac{E-E_f}{kT}} + 1} = \begin{cases} 1, E \leq E_f \\ 0, E > E_f \end{cases}.$$

Тут $E_f = \mu$ – енергія Фермі – нормувальна константа, що залежить від густини станів (у неперервному наближенні).

Зміст такої функції розподілу (рис. 19.1) полягає у тому, що ймовірність заповнення енергетичних рівнів з енергією більшою за енергію Фермі, при абсолютному нулі, дорівнює нулю. Таким чином, енергія Фермі це максимальна кінетична енергія електронів при 0 К.

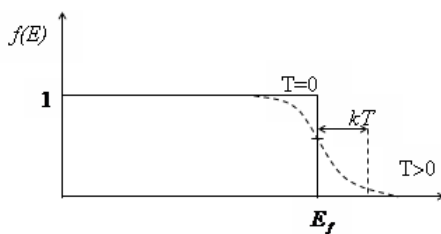


Рисунок 19.1 – функція розподілу Фермі-Дірака (суцільна – при $T = 0$, пунктирна – при $T > 0$ К)

При $T > 0$ у стані з $E = E_f$ $f(E) = 1/2$ різкий край функції розподілу «розмивається» на «довжині» порядку kT . Це означає, що за рахунок теплової енергії відбувається перехід з нижніх заповнених до вільних вищих енергетичних станів.

Якщо розподіл Фермі-Дірака записати у вигляді $f(E) = Ae^{-\frac{E}{kT}}$, де $A = e^{\frac{E_f}{kT}}$ – параметр виродження, то залежно від співвідношення T і E_f , квантова статистика може перейти в статистику Больцмана. При енергіях $(E - E_f) \gg kT$ $A \cong 1$, тобто $kT \gg E_f$ (високі температури) – газ квантових частинок невироджений і підпорядковується класичній статистиці. Якщо ж $kT \ll E_f$ (низькі температури) газ називається виродженим і при цьому квантованістю знехтувати не можна.

Застосування статистик.

19.1.1 Фононний газ. Теплоємність кристалічної ґратки.

У газах частинки одночасно виконують дві функції: вони є «цеглинками» самої речовини газу, тобто виконують функцію структурних одиниць системи, і одночасно є носіями руху в цій системі. У твердому тілі ці дві функції розділяються: атоми, молекули або іони являють собою структурні одиниці твердого тіла, а квазічастинки – фонони – структурні одиниці коливального руху у твердому тілі. Так як кристал – це система N пружно зв'язаних атомів, що володіють $3N$ ступенями вільності, у ньому поширюються $3N$ незалежні хвилі, які, дійшовши до поверхні кристала, відбиваються, утворюючи систему стоячих хвиль. Механізм утворення цих хвиль аналогічний механізму звукових хвиль, тому їх називають акустичними (швидкість їх поширення така ж, як і звуку). Енергія теплових акустичних хвиль квантована. Порція такої енергії $E = \hbar\omega$ називається **фононом**.

Так як фонони, поширюючись у кристалі, розсіюються при зустрічі один з одним і з дефектами ґратки, то це єдиний вид

частинок, для яких не виконується закон збереження імпульсу. Тому їх імпульс $\vec{p} = \hbar \vec{k} = \frac{\hbar \omega}{v}$ називають **квазіімпульсом**.

Коливальна енергія фононів квантована $E_i = (n_i + \frac{1}{2}) \hbar \omega_i$, де $n_i = 0, 1, 2, \dots$

$$\text{Енергія кристала: } E = \sum_i (n_i + \frac{1}{2}) \hbar \omega_i = E_0 + \sum_1^{3N} n_i \hbar \omega_i,$$

де E_0 – енергія нульових коливань (так званий нульовий рух, який немає дискретних характеристик).

Довжина фононних хвиль не може бути меншою за $2d$, де d – постійна ґратки. Отже, існує деяка **максимальна частота** $\omega_{\max}$ нормальних коливань ґратки:

$$\omega_m = v \sqrt{6\pi^2 n} \quad (\text{тут } n - \text{число атомів в одиниці об'єму } V).$$

Число стоячих хвиль в інтервалі $(\omega, \omega + d\omega)$ в одиниці об'єму V : $dN_\omega = \frac{3\omega^2 d\omega}{2\pi^2 v^3}$ (число 3 враховує поляризацію пружних хвиль: 1 поздовжня + 2 поперечних).

Усереднену швидкість акустичних хвиль v знаходять із рівняння $\frac{3}{v^3} = \frac{1}{v_{\parallel}^3} + \frac{2}{v_{\perp}^3}$, де $v_{\parallel} = \sqrt{G/\rho}$ й $v_{\perp} = \sqrt{E/\rho}$ – швидкість

поздовжньої і поперечної хвилі в кристалі, відповідно; G і E – модулі поздовжньої і поперечної пружності; ρ – густина речовини. Таке визначення швидкості не дозволяє теорії Дебая бути абсолютно точною.

Енергія одиниці об'єму кристала:

$$E = E_0 + \int_0^{\omega_m} \frac{\hbar \omega}{e^{\frac{\hbar \omega}{kT}} - 1} \cdot 9n \frac{\omega^2 d\omega}{\omega_m^3} = E_0 + \frac{9n\hbar}{\omega_m^3} \int_0^{\omega_m} \frac{\omega^3 d\omega}{e^{\frac{\hbar \omega}{kT}} - 1},$$

де $E_0 = \frac{9}{8} n \hbar \omega_m$ – енергія нульових коливань.

Молярна енергія нульових коливань $E_{\mu 0} = \frac{9}{8} R \theta$.

Теплоємність $C = \frac{dE}{dT}$:

$$C = \frac{9n\hbar}{\omega_m^3} \int_0^{\omega_m} \frac{\frac{\hbar\omega}{kT} \hbar\omega^4 d\omega}{(e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1)^2 kT^2} = 9nk \frac{T^3}{(\frac{\hbar\omega_m}{k})^3} \int_0^{x_m} \frac{e^x x^4 dx}{(e^x - 1)^2}, \text{ де } x_m = \frac{\hbar\omega_m}{kT}.$$

Характеристична температура Дебая: $\theta = \frac{\hbar\omega_m}{k}$,

температура, нижче якої стають істотними квантові властивості речовини.

З урахуванням θ : $C = 9nk \left(\frac{T}{\theta}\right)^3 \int_0^{\theta/T} \frac{e^x x^4 dx}{(e^x - 1)^2}$. Даний вираз

можна частково інтегрувати та для розв'язування завдань використовувати формулу для молярної теплоємності:

$$C_\mu = 3R \left[12 \left(\frac{T}{\theta}\right)^3 \int_0^{\theta/T} \frac{x^3 dx}{e^x - 1} - \frac{3(\theta/T)}{e^{\theta/T} - 1} \right]. \quad (19.4)$$

Інтеграл розраховується методом чисельного інтегрування¹⁷.

Граничні випадки:

при $T \gg \theta$ молярна теплоємність не залежить від температури: $C_\mu = 3R$ – **закон Дюлонга-Пті**;

при $T \ll \theta$ молярна теплоємність $C_\mu = \frac{12\pi^4 R}{5\theta^3} T^3$ –

закон кубів Дебая.

19.1.2 Електронний газ

Розподіл Фермі по енергіях для вільних електронів:

¹⁷ При розв'язуванні завдань користуйтеся:

$$\int_0^1 \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = 0,225; \quad \int_0^2 \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = 1,18$$

$$dN(E) = \frac{V}{2\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \frac{\sqrt{E}}{e^{\frac{E-\mu}{kT}} + 1} dE.$$

Функція розподілу електронів за енергіями визначає кількість частинок у даному енергетичному стані. Для температури $T = 0$ К функція розподілу:

$$g(E) = \frac{dN}{dE} = \frac{V}{2\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \sqrt{E}.$$

Залежність $g(E)$ від енергії показана на рисунку 19.2. Число електронів, що заповнюють N нижніх станів (заштрихована площа) буде

$$N = \int_0^{E_f} g(E) dE.$$

Даний інтеграл визначає значення енергії Фермі E_f .

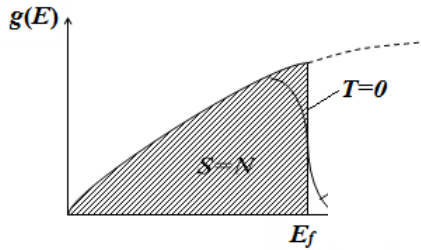


Рисунок 19.2

Енергія Фермі максимальна кінетична енергія електронів при 0 К: $E_f = \frac{\hbar^2}{2m} (3\pi^2 n)^{2/3}$, де $n = \frac{N}{V}$ – концентрація вільних (валентних) електронів, що дорівнює добутку концентрації атомів на валентність.

Середня енергія вільних (валентних) електронів:

$$\langle E \rangle = \frac{\int_0^{E_f} E g(E) dE}{\int_0^{E_f} g(E) dE} = \frac{3}{5} E_f.$$

Розподіл Фермі по імпульсах при $T = 0$:

$$dN(p) = \frac{1}{\pi^2 \hbar^3} p^2 dp.$$

Температура T_0 , яка обумовлена співвідношенням $kT_0 = E_f$, називається **температурою виродження**. Вона визначає межу, вище якої квантові ефекти перестають бути суттєвими. Якщо температура газу $T > T_0$, то більша кількість частинок має енергію, що значно перевищує E_f , і принцип Паулі перестає помітно впливати на стан газу: $T_0 = \frac{2\pi\hbar^2}{k m} n^{2/3}$. У металах

температура виродження > 10000 К, таким чином, електрони в металі завжди вироджені, і нехтувати квантовими властивостями не можна.

Залежність енергії Фермі від температури:

$$E_f \approx E_f(0) \left[1 - \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{kT}{E_f(0)} \right)^2 \right].$$

Молярна теплоємність електронного газу: $C_\mu \approx 4R \left(\frac{kT}{E_f} \right)$.

19.2 Завдання по темі

По відомим параметрам наведеним в таблиці умови знайдіть відповіді на поставлені питання згідно з варіантом.

	Метал	E , ГПа	G , ГПа	μ , кг/моль	ρ , 10^3 кг/м ³	ν
1	Мідь	110	44,7	0,0635	8,92	1
2	Срібло	80	29,2	0,1078	10,49	1
3	Свинець	18	5,7	0,2072	11,34	2
4	Алюміній	70	26	0,02698	2,7	3
5	Кобальт	207	47	0,0589	8,79	2
6	Нікель	205	73	0,0587	8,9	2
7	Титан	118	41	0,0479	4,51	2
8	Золото	77	25	0,1969	19,32	1

В таблиці E – модуль Юнга, G – модуль зсуву, μ – молярна маса, ρ – густина, ν – валентність

Теплові властивості твердих тіл:

1. Швидкість акустичних хвиль у кристалі.
2. Концентрацію атомів кристала.
3. Максимальну частоту коливань кристалічної ґратки.
4. Температуру Дебая θ .
5. Максимальну енергію ε_m фонона, який може збуджуватися в кристалі.
6. Енергію нульових коливань.
7. Обчислити середнє значення енергії нульових коливань, що припадає на один осцилятор кристала.
8. Обчислити енергію нульових коливань, що припадає на один грам кристала.
9. Оцінити максимальне значення p_m імпульсу фонона. Фотон якої довжини хвилі λ має такий самий імпульс?
10. Визначити фононний тиск p при температурі $T = \theta$.
11. Користуючись теорією теплоємності Дебая, визначити зміну молярної внутрішньої енергії кристала при нагріванні його від нуля до $T = 0,1\theta$.
12. Кількість теплоти, що необхідна для нагрівання маси $m = 10$ г від $T_1 = 10$ К до $T_2 = 20$ К, за умови $T \ll \theta$.
13. Кількість теплоти, що необхідна для нагрівання кристала масою $m = 10$ г на $\Delta T = 2$ К від температури а) $T = \theta/2$; б) $T = \theta/3$; в) $T = \theta/4$.

Електронний газ в металах:

14. Енергію Фермі.
15. Максимальну швидкість електронів.
16. Середню швидкість вільних електронів.
17. Тиск електронного газу.
18. Оцінити температуру T_0 виродження.
19. Молярну теплоємність електронного газу.

20. Чому рівна ймовірність W того, що в стані, з енергією Фермі E_f , буде перебувати вільний електрон? Визначити середнє число вільних електронів, що перебувають на цьому енергетичному рівні?

21. Метал перебуває при температурі $T = 0$ К. Визначити у скільки разів кількість електронів з кінетичною енергією від $E_f/2$ до E_f , є більшою за кількість електронів з енергією від 0 до $E_f/2$.

Рекомендації при розв'язуванні завдань

Пункти 1 – 9, так само 14 – 20 розв'язуються за визначеннями (за формулами теорії).

У п.10 врахуйте, що при $T = \theta$ фони поведуться як частинки ідеального газу, отже, для них виконується основне рівняння молекулярно-кінетичної теорії $pV = \frac{2}{3}E$, де

$E = \frac{m}{M} 3RT$ – повна енергія маси m газу. Аналогічне зауваження і для електронного газу, при розв'язуванні п.17.

У п.11,12: внутрішню енергію кристала можна змінити за рахунок передачі йому кількості теплоти Q . За визначенням теплота $Q = \frac{m}{M} \int_{T_1}^{T_2} C_\mu dT$. Для низьких температур, що відповідає умовам, молярна теплоємність визначається за законом кубів

Дебая $C_\mu = \frac{12 \cdot \pi^4 R}{5} \left(\frac{T}{\theta} \right)^3$, тоді

$$\begin{aligned} Q &= \frac{m}{M} \int_{T_1}^{T_2} \frac{12 \cdot \pi^4 R}{5} \left(\frac{T}{\theta} \right)^3 dT = \frac{m}{M} \frac{12 \cdot \pi^4 R}{5 \theta^3} \int_{T_1}^{T_2} T^3 dT = \\ &= \frac{m}{M} \frac{12 \cdot \pi^4 R}{5 \theta^3} \frac{T^4}{4} \Big|_{T_1}^{T_2} = 0,6 \frac{m}{M} \frac{\pi^4 R (T_2^4 - T_1^4)}{\theta^3}. \end{aligned}$$

У п.13: так як інтервал температур ΔT малий, можна вважати, що теплоємність постійна й дорівнює теплоємності за температури T . Тоді, кількість теплоти $Q = \frac{m}{M} C_\mu \Delta T$ і завдання зводиться до розрахунків молярної теплоємності за формулою (18.4). При розрахунках інтеграла скористайтесь таблицею 18.1.

Таблиця 19.1 – Значення $\gamma(\theta/T) = \int_0^{\theta/T} \frac{x^3}{e^x - 1} dx$ від (θ/T)

(θ/T)	0,0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5
$\gamma(\theta/T)$	0,00	0,034	0,225	0,615	1,176	1,844	2,552	3,243

(θ/T)	4,0	4,5	5,0	5,5	6,0	6,5	7,0	7,5
$\gamma(\theta/T)$	3,877	4,432	4,90	5,282	5,586	5,822	6,003	6,139

У п.16 запишіть середню швидкість через максимальну швидкість $v_{\max}$ валентних електронів. Для цього визначте енергію Фермі й знайдіть $v_{\max}$. Далі використовуйте розподіл електронів по імпульсах і знайдіть функцію розподілу за

швидкостями $dn(v)$, тоді $\langle v \rangle = \frac{\int_0^{v_m} v \cdot dn(v)}{\int_0^{v_m} dn(v)}$.

У п.21: функція розподілу електронів за енергіями $g(E)$ визначає ймовірність заповнення енергетичного стану, а отже визначає кількість електронів dn в інтервалі енергій dE :

$$\Delta N = \int_{E_1}^{E_2} g(E) dE.$$

Так як потрібно визначити не абсолютне число

частинок, а відносне, то для розрахунків зручно представити функцію розподілу у вигляді: $g(E) = A\sqrt{E}$, де $A = \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2}$ – деяка константа.

Тема 20. ЯДЕРНА ФІЗИКА

20.1 Основні теоретичні положення

Атоми складаються з ядра і електронів, кількість яких відповідає порядковому номеру елемента в таблиці Менделєєва. У свою чергу атомне ядро складається з елементарних частинок – **протонів і нейтронів**.

Протон (p) має позитивний заряд, який дорівнює заряду електрона, і масу спокою $m_p = 1,6726 \cdot 10^{-27} \text{ кг} \approx 1836 m_e$, де m_e – маса електрона. Нейтрон (n) – нейтральна частинка з масою спокою $m_n = 1,6749 \cdot 10^{-27} \text{ кг} \approx 1839 m_e$. Протони та нейтрони називаються **нуклонами**. Загальна кількість нуклонів в атомному ядрі називається **масовим числом A** .

Атомне ядро характеризується зарядом Ze , де e – заряд протона, Z – **зарядове число ядра**, яке дорівнює числу протонів у ядрі й співпадає з кількістю електронів.

Позначення ядра ${}_Z^AX$.

Ізотопи – ядра того самого елемента (з однаковими Z), але з різними A (тобто з різною кількістю нейтронів $N = A - Z$).

Ізобари – ядра з однаковими A , але різними Z .

Ізотони – ядра з однаковою кількістю нейтронів.

Атомні ядра мають розміри приблизно $10^{-14} \div 10^{-15}$ м при лінійних розмірах атома порядку 10^{-10} м.

Радіус ядра – $R = R_0 A^{1/3}$, де $R_0 = (1,3 \div 1,7) 10^{-15}$ м. Об'єм ядра пропорційний числу нуклонів у ядрі й густина ядерної речовини приблизно однакова для всіх ядер ($\approx 10^{17} \text{ кг/м}^3$).

Енергія зв'язку нуклонів у ядрі – енергія, яку необхідно витратити, щоб розщепити ядро на окремі нуклони:

$$E_{\text{св}} = [Zm_p + (A - Z)m_n - m_{\text{я}}]c^2,$$

де m_p , m_n , $m_{\text{я}}$ – відповідно маси протона, нейтрона і ядра. Якщо маси ядер (атомів) виразити в а.о.м. (атомні одиниці маси), то коефіцієнт $mc^2 = 931,5 \text{ МеВ/а.о.м.}$. При цьому енергія зв'язку буде виражена у МеВ. У таблицях зазвичай приводяться не маси $m_{\text{я}}$

ядер, а маси m_{am} атомів. Тому, для знаходження енергії зв'язку ядра користуються формулою:

$$E_{cb} = [Zm_H + (A - Z)m_n - m_{am}]c^2,$$

де m_H – маса атома водню. Тому що m_H більше m_p на величину m_e , перший член у квадратних дужках містить у собі масу Z електронів. Але тому що маса атома m_{am} відрізняється від маси ядра $m_{я}$ саме на масу Z електронів, обчислення за обома формулами призводять до однакових результатів.

Дефект маси ядра: $\Delta m = [Zm_p + (A - Z)m_n - m_{я}].$

Найбільш стійкими виявляються, так звані, магічні ядра, у яких число протонів або число нейтронів рівно одному з магічних чисел: 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126. Особливо стабільні двічі магічні ядра, у яких магічними є й число протонів, і число нейтронів (цих ядер усього п'ять: ${}^4_2\text{He}$, ${}^{16}_8\text{O}$, ${}^{40}_{20}\text{Ca}$, ${}^{48}_{20}\text{Ca}$, ${}^{208}_{82}\text{Pb}$).

Закон радіоактивного розпаду: кількість радіоактивних ядер зменшується з часом по експоненті:

$$N = N_0 e^{-\lambda t},$$

де N – кількість ядер, які не розпалися за час t ;

λ – стала радіоактивного розпаду;

N_0 – початкова кількість радіоактивних ядер (в момент часу $t = 0$).

Інтенсивність процесу радіоактивного розпаду характеризують дві величини: період напіврозпаду $T_{1/2}$ і середній час життя τ радіоактивного ядра.

Період піврозпаду $T_{1/2}$ – час, за який початкова кількість радіоактивних ядер при розпаді зменшується вдвічі.

$$N_0/2 = N_0 e^{-\lambda T_{1/2}}, \text{ звідки } T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0,693}{\lambda}.$$

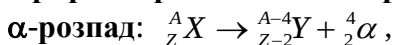
Середній час життя τ радіоактивного ядра: $\tau = \frac{1}{\lambda}.$

Активністю A радіоактивного ізотопу називається число розпадів, що відбувається з ядрами за 1 с:

$$A = \left| \frac{dN}{dt} \right| = \lambda N.$$

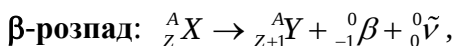
Одиниця активності в СІ – беккерель (Бк): 1 Бк – активність нукліда, при якій за 1 с відбувається один акт розпаду. Дотепер у ядерній фізиці застосовують також позасистемні одиниці активності нукліда радіоактивного джерела: **кюри** (Ки) – число розпадів за 1 секунду в 1 грамі радію: $1 \text{ Ки} = 3,7 \cdot 10^{10} \text{ Бк}$; **рентген** (Р), яким користуються для визначення експозиційної дози. Один рентген відповідає дозі X- або гамма-випромінювання, при якій в 1 см^3 повітря утворюється $2 \cdot 10^9$ пар іонів $1 \text{ Р} = 2,58 \cdot 10^{-4} \text{ Кл/кг}$.

Природні радіоактивні перетворення:



де ${}_Z^AX$ – материнське ядро, Y – символ дочірнього ядра,

α -частинка (ядро гелію ${}_2^4\text{He}$).



де ${}_Z^AX$ – материнське ядро, Y – символ дочірнього ядра,

${}_{-1}^0\beta$ – символічне позначення електрона (β -частинки),

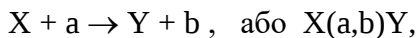
${}_0^0\tilde{\nu}$ – антинейтрино.

γ -випромінювання є короткохвильове електромагнітне випромінювання з надзвичайно малою довжиною хвилі $\lambda < 10^{-10} \text{ м}$ і внаслідок цього – яскраво вираженими корпускулярними властивостями, тобто є потоком частинок – γ -квантів (фотонів). γ -випромінювання випромінюється дочірнім ядром, яке на момент свого створення, виявляється збудженим, і за час, приблизно $10^{-13} \div 10^{-14} \text{ с}$, переходить в основний стан з випромінюванням γ -квантів. Повертаючись в основний стан, збуджене ядро може пройти через ряд проміжних станів, тому γ -випромінювання того самого радіоактивного ізотопу може містити кілька груп γ -квантів, що відрізняються одна від іншої своєю енергією.

Утворені в результаті радіоактивного розпаду ядра можуть бути, у свою чергу, радіоактивними. Це призводить до виникнення ланцюжка, або ряду, радіоактивних перетворень, що закінчується стабільним елементом. Сукупність елементів, що

утворюють такий ланцюжок, називається **радіоактивним сімейством**.

Ядерні реакції – це перетворення атомних ядер при взаємодії один з одним або з елементарними частинками (у тому числі з γ -квантами). Ядерної реакції записують символічно в такий спосіб:



де X і Y – вихідне і кінцеве ядро,

a – частинка, що бомбардує,

b – частинка, що випромінюється під час ядерної реакції.

В ядерних реакціях виконуються закони збереження масового числа, зарядового числа, енергії, імпульсу та спіну.

На відміну від радіоактивного розпаду, який протікає завжди з виділенням енергії, ядерні реакції можуть бути як екзотермічними (з виділенням енергії), так і ендотермічними (з поглинанням енергії).

Тепловий ефект ядерної реакції:

$$Q = c^2 [(m_1 + m_2) - (m_3 + m_4)],$$

де $(m_1 + m_2)$ – маси ядер, що вступають у реакцію;

$(m_3 + m_4)$ – маси ядер продуктів реакції.

Ця енергія є кінетичною енергією продуктів реакції, тому що передбачається, що ядро X перебуває до реакції в стані спокою.

Реакції поділу ядра – важке ядро під дією нейтронів і інших елементарних частинок ділиться на більш легкі ядра (уламки), найчастіше на два ядра, близьких за масою. Реакції супроводжуються виділенням великої кількості енергії. Вторинні нейтрони, що випромінюються при поділі ядер, можуть викликати нові акти поділу, що призводить до здійснення ланцюгової реакції поділу – ядерної реакції, у якій частинки, що викликають реакцію, утворюються як продукти цієї ж реакції.

Реакція синтезу атомних ядер – утворення з легких ядер більш важких; супроводжується виділенням кількості енергії на порядок більше, чим у реакціях поділу ядер.

20.2 Завдання по темі

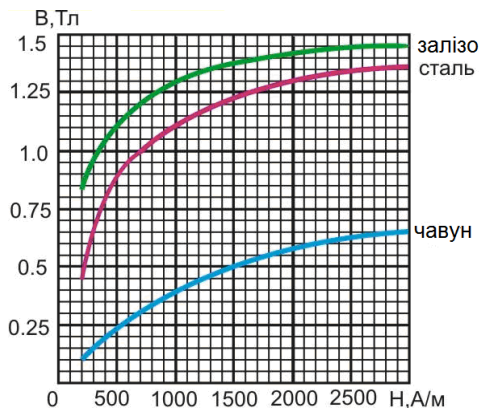
Умова 20.1. За таблицею варіантів для відповідного ізотопу *визначити*:

1. Кількість нуклонів, протонів і нейтронів у ядрі.
2. Дефект маси та енергію зв'язку ядра.
3. Питому енергію зв'язку ядра.
4. Активність зразка масою 1 мг.
5. Як зміниться активність через час t ?
6. Кількість ядер, що розпадеться за час t ?

Варі- ант	Ізотоп		Атомна маса, а.о.м.	Період піврозпаду	Час, t
	Електрон	${}_{-1}\text{e}^0$	0,00055		
	Протон	${}_1\text{p}^1$	1,00728		
	Нейтрон	${}_0\text{n}^1$	1,00867		
	α -частка	${}_2\text{He}^4$	4,00149		
1	Вуглець	${}_6\text{C}^{12}$	12,00000		
2		${}_6\text{C}^{11}$	11,011433	20,33 хв	10 хв
		${}_6\text{C}^{14}$	14,00324	5700 років	1000 років
3	Магній	${}_{12}\text{Mg}^{27}$	26,9843405	9,458 хв	5 хв
4		${}_{12}\text{Mg}^{28}$	27,9838768	20,915 годин	5 годин
5	Фосфор	${}_{15}\text{P}^{32}$	31,9739073	14,263 діб	1 діб
6		${}_{15}\text{P}^{33}$	32,9717255	25,34 діб	2 доби
7	Кобальт	${}_{27}\text{Co}^{60}$	59,9338171	5,2713 років	1 рік
8		${}_{27}\text{Co}^{56}$	55,9398393	77,233 діб	10 діб
9	Криптон	${}_{36}\text{Kr}^{77}$	76,9246700	74,466 хв	15 хв
10	Стронцій	${}_{38}\text{Sr}^{82}$	81,918402	25,36 діб	2 доби
11		${}_{38}\text{Sr}^{85}$	84,912933	64,85 діб	3 доби
12	Ксенон	${}_{54}\text{Xe}^{127}$	126,905184	36,345 діб	2 доби
13		${}_{54}\text{Xe}^{120}$	119,911784	40 хв	5 хв
14	Радій	${}_{88}\text{Ra}^{223}$	223,0185022	11,43 діб	1 доба
15		${}_{88}\text{Ra}^{228}$	228,0310703	5,75 років	0,5 років
16	Уран	${}_{92}\text{U}^{232}$	232,0371562	68,9(4) років	10 років
17		${}_{92}\text{U}^{237}$	237,0487302	6,75(1) діб	1 доба

Додаток А

Криві намагнічування трьох різних феромагнетиків



Додаток В

Таблиці варіантів індивідуальних завдань¹⁸

Таблиця В.1 – Модуль «Механічний рух»

	тема 1	тема 2	тема 3	тема 4	
1	1.1 а)	2.1	3.2 р.1	4.1-А	4.7 а)
2	1.2 а)	2.2	3.2 р.2	4.1-Б	4.7 б)
3	1.3 а)	2.3-А р.1	3.1 в)	4.1-В	4.7 в)
4	1.4	2.3-А р.2	3.1 а)	4.2-А	4.7 г)
5	1.1 б)	2.3-А р.3	3.1 б)	4.2-Б а)	4.7 д)
6	1.2 б)	2.3-А р.4	3.1 в)	4.2-Б б)	4.7 е)
7	1.3 б)	2.4	3.2 р.3	4.2-Б в)	4.7 а)
8	1.2 а)	2.5	3.2 р.4	4.3	4.7 б)
9	1.1 б)	2.3-Б р.2	3.1 а)	4.6-А	4.7 в)
10	1.4	2.3-Б р.4	3.1 б)	4.6-Б а)	4.7 г)
11	1.3 а)	2.1	3.2 р.3	4.6-Б б)	4.7 д)
12	1.3 б)	2.2	3.2 р.4	4.6-В	4.7 е)

¹⁸ Для підзвітної самостійної роботи в таблиці внесені тільки завдання, які позначені як «умови»

Таблиця В.2 – Модуль «Коливальний рух, хвилі.
Релятивістська механіка»

Варіант	тема 5		тема 6	тема 7
1	5.1-А	5.2 а)	6.1-А а)	7.3
2	5.1-Б	5.2 б)	6.1-А б)	7.4
3	5.4-А	5.2 в)	6.1-А в)	7.3
4	5.5 а)	5.3 а)	6.1-Б а)	7.4
5	5.5 б)	5.3 б)	6.1-Б б)	7.3
6	5.5 в)	5.3 в)	6.1-А а)	7.4
7	5.1-В	5.3 г)	6.1-А б)	7.3
8	5.1-Г	5.3 д)	6.1-А в)	7.4
9	5.4-Б	5.3 е)	6.1-Б а)	7.3
10	5.5 а)	5.2 а)	6.1-Б б)	7.4
11	5.5 б)	5.2 б)	6.1-А а)	7.3
12	5.5 в)	5.2 в)	6.1-А б)	7.4

Таблиця В.3 – Модуль «Молекулярна фізика и
термодинаміка»

Варіант	тема 8		тема 9		тема 10
		для п.6	газ	питання	газ
1	1	а)	а)	1-3,4,7а,8	а)
2	2	б)	б)	1-3,5,7б,8	б)
3	3	в)	в)	1-3,6,7в,8	в)
4	5	г)	а)	1-3,5,7а,8	а)
5	6	д)	б)	1-3,4,7б,8	б)
6	7	е)	в)	1-3,5,7в,8	в)
7	1	ж)	а)	1-3,6,7а,8	а)
8	2	а)	б)	1-3,5,7а,8	б)
9	3	б)	в)	1-3,4,7в,8	в)
10	5	в)	а)	1-3,5,7в,8	а)
11	6	г)	б)	1-3,6,7б,8	б)
12	7	д)	в)	1-3,4,7а,8	в)

Таблиця В.4 – Модуль «Електростатика. Постійний струм»

	тема 11		тема 12		тема 13
		для п. 5		для п. 5, 6	
1	Рис. 4 т. А	D	11.1-А	а)	Рис. 1 а)
2	Рис. 4 т. В	С	11.1-А	б)	Рис. 1 б)
3	Рис. 4 т. С	F	11.1-Б	а)	Рис. 1 в)
4	Рис. 5 т. D	A	11.1-Б	б)	Рис. 2 а)
5	Рис. 5 т. F	B	11.2		Рис. 2 б)
6	Рис. 5 т. А	B	11.1-А	а)	Рис. 2 в)
7	Рис. 2 т. В	С	11.1-А	б)	Рис. 4 в)
8	Рис. 2 т. С	D	11.1-Б	а)	Рис. 3 а)
9	Рис. 2 т. D	F	11.1-Б	б)	Рис. 3 б)
10	Рис. 3 т. F	A	11.2		Рис. 3 в)
11	Рис. 3 т. А	B	11.1-А	а)	Рис. 4 а)
12	Рис. 3 т. В	С	11.1-А	б)	Рис. 4 б)

Таблиця В.5 – Модуль «Електромагнетизм»

	14.1	14. 2	14.3-А (Б)	14.4			14.5
				умова		питання	
1	Рис. 5 А	а)	90°	а)	30°	1, 2	1-3, 4
2	Рис. 5 В	б)	45°	б)	60°	1, 3 а)	1-3, 5
3	Рис. 6 А	в)	30°	в)	90°	1, 3 б)	1-3, 6
4	Рис. 6 В	г)	60°	а)	45°	1, 3 в)	1-3, 4
5	Рис. 6 С	а)	90°	б)	30°	1, 4	1-3, 5
6	Рис. 7	б)	45°	в)	60°	1, 5	1-3, 6
7	Рис. 8	в)	30°	б)	90°	1, 6	1-3, 4
8	Рис. 9	г)	60°	в)	45°	1, 3 а)	1-3, 5
9	Рис. 5 А	а)	90°	а)	30°	1, 3 б)	1-3, 6
10	Рис. 5 В	б)	45°	а)	60°	1, 3 в)	1-3, 4
11	Рис. 6 А	в)	30°	б)	90°	1, 4	1-3, 5
12	Рис. 6 В	г)	60°	в)	45°	1, 5	1-3, 6

Таблиця В.6 – Модуль «Хвильова оптика»

		15.4 питання	15.5
1	15.1: 1а)	1,2,5	а) $\alpha = 30^\circ$
2	15.3 б)	1,3,6	б) $\alpha = 45^\circ$
3	15.2 а): $\alpha = 30^\circ$; п. 1а); п. 2а)	1,4,7	а) $\alpha = 60^\circ$
4	15.2 а): $\alpha = 45^\circ$ п. 1б); п. 2б)	1,2,6	б) $\alpha = 90^\circ$
5	15.2 а): $\alpha = 60^\circ$ п. 1а); п.2б)	1,3,7	б) $\alpha = 30^\circ$
6	15.3 а)	1,4,5	а) $\alpha = 45^\circ$
7	15.2 б): $\alpha = 30^\circ$; п. 1а); п.2а)	1,2,5	б) $\alpha = 60^\circ$
8	15.2 б): $\alpha = 45^\circ$ п. 1б); п.2б)	1,3,6	а) $\alpha = 90^\circ$
9	15.2 б): $\alpha = 60^\circ$ п. 1а); п.2б)	1,4,7	а) $\alpha = 30^\circ$
10	15.1: 1а)	1,2,6	б) $\alpha = 45^\circ$
11	15.1: 1б)	1,3,7	а) $\alpha = 60^\circ$
12	15.3 а)	1,4,5	б) $\alpha = 90^\circ$

Таблиця В.7 – Модуль «Квантова оптика»

Варіант	16.1	16.2	16.3
1	а)	а)	$\theta = 60^\circ$; п. 1 - 4,5
2	б)	б)	$\theta = 90^\circ$; п. 1 - 4,6
3	а)	в)	$\theta = 120^\circ$; п. 1 - 4,5
4	б)	а)	$\theta = 30^\circ$; п. 1 - 4,6
5	а)	б)	$\theta = 60^\circ$; п. 1 - 4,6
6	б)	в)	$\theta = 90^\circ$; п. 1 - 4,5
7	а)	а)	$\theta = 120^\circ$; п. 1 - 4,6
8	б)	б)	$\theta = 30^\circ$; п. 1 - 4,5
9	а)	в)	$\theta = 60^\circ$; п. 1 - 4,6
10	б)	а)	$\theta = 90^\circ$; п. 1 - 4,5
11	а)	б)	$\theta = 120^\circ$; п. 1 - 4,5
12	б)	в)	$\theta = 30^\circ$; п. 1 - 4,6

Таблиця В.8 – Модуль «Квантова механіка». Тема 16

Варіант	17.1 питання	17.2 питання	17.3 питання
1	1; 2; 3; 6 а),а); 7	1; 2; 3; 5	1; 2; 3
2	1; 2; 4; 6 б),а); 8	1; 2; 3; 6	1; 2; 4
3	1; 2; 5; 6 в),а); 7	1; 2; 4; 5	1; 2; 3
4	1; 2; 3; 6 г),а); 8	1; 2; 4; 6	1; 2; 4
5	1; 2; 3; 6 а),б); 7	1; 2; 3; 5	1; 2; 3
6	1; 2; 4; 6 б),б); 8	1; 2; 3; 6	1; 2; 4
7	1; 2; 5; 6 в),б); 7	1; 2; 4; 5	1; 2; 3
8	1; 2; 3; 6 г),б); 8	1; 2; 4; 6	1; 2; 4
9	1; 2; 3; 6 б),а); 7	1; 2; 3; 5	1; 2; 3
10	1; 2; 4; 6 в),а); 8	1; 2; 3; 6	1; 2; 4
11	1; 2; 5; 6 г),а); 7	1; 2; 4; 5	1; 2; 3
12	1; 2; 3; 6 а),а); 8	1; 2; 4; 6	1; 2; 4

Таблиця В.9 – Модуль «Квантова механіка». Тема 17

Варіант	18.1 питання	18.2 питання	18.3-1	18.3-2 Z
1	1; 2	1; 2 Л; 4; 5 а); 6; 7 р	а)	43
2	1; 3	1; 2 Б; 3; 5 б); 6; 7 d	б)	58
3	1; 4	1; 2 П; 4; 5 в); 6; 7 f	в)	62
4	1; 5	1; 2 Л; 3; 5 а); 6; 7 d	а)	21
5	1; 6	1; 2 Б; 4; 5 б); 6; 7 р	б)	33
6	1; 2	1; 2 П; 3; 5 в); 6; 7 f	в)	48
7	1; 3	1; 2 Л; 4; 5 а); 6; 7 d	а)	52
8	1; 4	1; 2 Б; 3; 5 б); 6; 7 f	б)	25
9	1; 5	1; 2 П; 4; 5 в); 6; 7 р	в)	74
10	1; 6	1; 2 Л; 3; 5 а); 6; 7 d	а)	68
11	1; 2	1; 2 Б; 4; 5 б); 6; 7 f	б)	44
12	1; 3	1; 2 П; 3; 5 в); 6; 7 р	в)	29

Таблиця В.10 – Модуль «Основи фізики твердого тіла»

Варіант	Елемент	питання
1	Мідь	1-5, 6, 9, 11, 14, 16, 18
2	Срібло	1-5, 7, 10, 12, 14, 17, 19
3	Свинець	1-5, 8, 9, 13, 14, 15, 21
4	Алюміній	1-5, 6, 10, 11, 14, 17, 18
5	Кобальт	1-5, 7, 9, 12, 14, 16, 19
6	Нікель	1-5, 8, 10, 13, 14, 17, 20
7	Титан	1-5, 6, 9, 11, 14, 15, 18
8	Золото	1-5, 7, 10, 12, 14, 17, 19
9	Мідь	1-5, 8, 9, 13, 14, 16, 21
10	Срібло	1-5, 6, 10, 11, 14, 15, 18
11	Свинець	1-5, 7, 9, 12, 14, 16, 19
12	Алюміній	1-5, 8, 10, 13, 14, 17, 20

ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАННЯ

1. Курс фізики: підручник. / І. Є. Лопатинський, І. Р. Зачек, І. М. Кравчук та ін. – Львів : Афіша, 2003. – 376 с.
2. Савельєв І. В. Курс фізики : в 3-х т. / І. В. Савельєв. – М. : Гл. ред. Физ.-мат. лит. , 1989.
3. Трофимова Т. И. Курс фізики / Т. И. Трофимова. – М. : Высшая школа, 1990. – 422 с.
4. Кучерук І.М. Загальний курс фізики: навчальний посібник для студ. техн. і пед. спец. вузів: у 3 т. Т.1: Механіка; Молекулярна фізика і термодинаміка/ І.М Кучерук, І.Т. Горбачук, П.П.Луцик – 2-ге вид., випр. – К.: Техніка, 2006.-532с.
5. Кучерук І.М. Загальний курс фізики: навчальний посібник для студ. техн. і пед. спец. вузів: у 3 т. Т.2: Електрика і магнетизм/ І.М Кучерук, І.Т. Горбачук, П.П.Луцик – 2-ге вид., випр. – К.: Техніка, 2006. – 452с.
6. Кучерук І.М. Загальний курс фізики: навчальний посібник для студ. техн. і пед. спец. вузів: у 3 т. Т.3: Оптика. Квантова фізика/ І.М Кучерук, І.Т. Горбачук, – 2-ге вид., випр. – К.: Техніка, 2006. – 518с.
7. Чолпан П.П. Основи фізики: навч.посіб. для студ. вищ. навч. Закл./ П.П.Чолпан; пер. з рос. – К.: Вищ.школа, 1995. – 488с.
8. Епифанов Г. И. Физика твердого тела / Г. И. Епифанов. – М. : Высшая школа, 1977.
9. Чертов А. Г. Задачник по физике / А. Г. Чертов, А. А. Воробьев. – М. : Вышш. школа, 1981. – 640 с.
10. Федішин Я.І. Збірник задач з фізики із розв'язками: навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл. освіти/ Я.І. Федішин, В.М. Когут, С.О. Вакарчук ; М-во освіти і науки України. – Львів : ЛНУ ім. І Франка, 2005. – 310 с.

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА.....	3
ВСТУП.....	6
Тема 1. КІНЕМАТИКА ПОСТУПОВОГО РУХУ МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ.....	8
Тема 2. ДИНАМІКА ПОСТУПАЛЬНОГО РУХУ.....	15
Тема 3. КІНЕМАТИКА І ДИНАМІКА ОБЕРТАЛЬНОГО РУХУ	22
Тема 4. ЗАКОНИ ЗБЕРЕЖЕННЯ ЕНЕРГІЇ, ІМПУЛЬСУ, МОМЕНТУ ІМПУЛЬСУ.....	28
Тема 5. КОЛИВАЛЬНИЙ РУХ.....	38
Тема 6. ПРУЖНІ ХВИЛІ.....	45
Тема 7. РЕЛЯТИВІСТСЬКА МЕХАНІКА.....	48
Тема 8. МОЛЕКУЛЯРНА ФІЗИКА І ТЕРМОДИНАМІКА.....	53
Тема 9. ОСНОВИ СТАТИСТИЧНОЇ ФІЗИКИ.....	61
Тема 10. ЯВИЩА ПЕРЕНОСУ В ГАЗАХ.....	66
Тема 11. ЕЛЕКТРОСТАТИКА.....	68
Тема 12. ПРОВІДНИКИ В ЕЛЕКТРОСТАТИЧНОМУ ПОЛІ....	77
Тема 13. ЗАКОНИ ПОСТІЙНОГО СТРУМУ.....	80
Тема 14. ЕЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ.....	88
Тема 15. ХВИЛЬОВА ОПТИКА.....	99
Тема 16. КВАНТОВА ОПТИКА.....	110
Тема 17. КВАНТОВА МЕХАНІКА. НАЙПРОСТІШІ ВИПАДКИ РУХУ МІКРОЧАСТИНОК.....	115
Тема 18. КВАНТОВА МЕХАНІКА. БУДОВА АТОМА. СПЕКТРИ.....	121
Тема 19. КВАНТОВІ СТАТИСТИКИ. ЕЛЕМЕНТИ ФІЗИКИ ТВЕРДОГО ТІЛА.....	127
Тема 20. ЯДЕРНА ФІЗИКА.....	137
Додаток А Криві намагнічування трьох різних феромагнетиків	142
Додаток В Таблиці варіантів індивідуальних завдань.....	142
ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАННЯ.....	148

Для нотаток

Для нотаток

Навчальне видання

О. В. Цветкова, В. Г. Єфременко, Ю. Г. Чабак

**КУРС ФІЗИКИ
У ВИЗНАЧЕННЯХ, ПРИКЛАДАХ І ЗАДАЧАХ**

Навчальний посібник для самостійної роботи студентів
технічних спеціальностей

2-ге видання виправлене та доповнене

Друкується в авторській редакції

Формат 60х84 1/16. Обсяг 8,84 ум. друк. арк., 8,25 обл.-вид. арк.
Наклад 300 пр. Зам. 103. Виготовлювач – Вежа-Друк
(м. Луцьк, вул. Шопена, 12, тел. +38 066 936 25 49).
Свідоцтво Держ. комітету телебачення та радіомовлення України
ДК № 4607 від 30.08.2013 р.